Abstract

In this master thesis, we study the restricted specialization of quantum enveloping algebras defined by Lusztig, as well as their representation theory.

First, we review briefly the class of quantum groups U_q introduced by Drinfel'd and Jimbo as deformations of the classical universal enveloping algebra of a simple Lie algebra and Lusztig's construction of an integral form on it.

Then, we consider the restricted specialization $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$ at a root of the unity ϵ. Contrary to most authors, we do not assume that the order l of the root is odd, that it is prime with the extra-diagonal coefficients of the Cartan matrix, nor that it is greater than the absolute values of these coefficients. We deal with the finite dimensional representations of the restricted specialization, define a character for these representations and classify the irreducible ones.

When l is greater than the absolute values of the extra-diagonal coefficients of the Cartan matrix, we propose a way to generalize Lusztig's factorization of irreducible $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-modules as a tensor product of a module over a finite dimensional subalgebra of $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$ and the pullback of a module over the classical enveloping algebra. In general, it seems necessary to consider the pullback of a $U_{\epsilon'}^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$-module, for some root of unity ϵ' whose order is, in most cases, not too large.

Finally we come back to the usual restrictions on l and give an overview of the framework of tilting modules. We mention that they form a family of finite dimensional $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-modules stable by various operations and explain how we can deduce a semisimple category from them.

Mémoire de Master - Université Pierre et Marie Curie

Spécialisation des groupes quantiques à une racine de l'unité et représentations de dimension finie

27 mai 2013

Frédéric Wang

Directeur de mémoire : Marc Rosso

Table des matières

1 Prérequis **7**
1.1 q-Notations . . . 7
1.2 Matrice de Cartan symétrisable . . . 8
1.3 Algèbres de Kac-Moody . . . 8
1.4 Racines . . . 9
1.5 Algèbre de Hopf . . . 9

2 Algèbre enveloppante quantifiée et spécialisations **11**
2.1 Forme rationnelle . . . 11
2.2 Formes intégrales . . . 14
2.3 Spécialisation restreinte . . . 21

3 Représentations de dimension finie **27**
3.1 Représentations de la forme rationnelle . . . 27
3.2 Représentations de la spécialisation restreinte . . . 28
3.3 Représentations irréductibles de la spécialisation restreinte . . . 34

4 Caractères et produits tensoriels des représentations **39**
4.1 Factorisation des représentations irréductibles . . . 39
4.2 Caractères des représentations . . . 47
4.3 Tilting Modules . . . 48

A Théorie Classique **54**
A.1 Algèbres de Lie simples de dimension finie . . . 54
A.2 Formule des caractères de Weyl . . . 55

B Spécialisations de l'algèbre enveloppante quantifiée **56**
B.1 Spécialisation non-restreinte . . . 56
B.2 Spécialisation en ± 1 . . . 57

Remerciements

Avant d'achever ce mémoire de master
Dans le domaine de la théorie de Lie
Je souhaite remercier mon frère et ma soeur
Partis vivre au Canada et en Italie
Et exprimer ma gratitude à mes parents
Pour leur soutien précieux, malgré l'éloignement.
Mes amis, merci beaucoup pour votre patience
Envers ma très maigre disponibilité
Lors des quelques mois que j'ai dédiés à la Science
Où je ne pus que rarement vous rencontrer.
J'ai travaillé comme ingénieur informatique,
Pour financer ce stage de groupes quantiques,
Je sais donc gré mes collègues Américains,
De m'avoir laissé un emploi du temps serein.
Ce mémoire n'aurait bien sûr pu voir le jour,
Sans l'aide de divers logiciels libres pour
Produire et lire une version Web et papier :
Que leurs auteurs soient sincèrement remerciés.
Enfin, je tiens à dire ma reconnaissance
A l'endroit de Monsieur Rosso, mon directeur
De thèse, bien occupé par son dur labeur
Mais trouvant le temps pour m'offrir son assistance.

Introduction

La notion de groupes quantiques a initialement été définie par les physiciens pour étudier les systèmes intégrables quantiques. Ils ont reçu une attention particulière des mathématiciens lorsque des relations surprenantes ont été découvertes entre les groupes quantiques et d'autres domaines des mathématiques tels que la construction d'invariants topologiques ou la théorie des représentations des groupes algébriques en caractéristique p.

Une classe de groupes quantiques particulièrement étudiée est celle, formalisée par Drinfel'd et Jimbo, des algèbres de Hopf $U_q(\mathfrak{g})$ pour une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. $U_q(\mathfrak{g})$ peut être vue comme une déformation de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ c'est-à-dire que $U_q(\mathfrak{g})$ est proche de $U(\mathfrak{g})$ quand $q \to 1$. Vers la fin des années 1980, Lusztig a construit deux formes intégrales de $U_q(\mathfrak{g})$ qui permettent de spécialiser q en un nombre complexe $\epsilon \neq 0$. On en déduit la spécialisation non restreinte $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ et la spécialisation restreinte $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$. Elles coïncident lorsque ϵ n'est pas une racine de l'unité et dans ce cas la théorie est très proche du cas classique : représentations irréductibles de plus haut poids, théorème de complète réductibilité des représentations etc

Les spécialisations sont distinctes si ϵ est une racine de l'unité d'ordre $l \geq 3$. Pour la spécialisation restreinte $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ nous retrouvons une classification des représentations irréductibles par un plus haut poids, mais la structure reste assez différente de celle de $U(\mathfrak{g})$. Par exemple, il n'existe pas de théorème de complète réductibilité pour les représentations de la spécialisation restreinte. On a $U_\epsilon(\mathfrak{g}) \subseteq U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ et toute représentation de $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ est donc aussi une représentation de $U_\epsilon(\mathfrak{g})$. Néanmoins la théorie des représentations de la spécialisation non restreinte est plus compliquée, par exemple il existe des représentations irréductibles cycliques de $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ par opposition aux représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ qui sont toutes de plus haut poids. Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la spécialisation restreinte pour ϵ une racine de l'unité quelconque.

Dans ses publications, Lusztig s'intéresse particulièrement au cas où l'ordre l de ϵ est impair. Comme indiqué dans [Saw2010], cette restriction se justifie par le fait que l'étude est plus simple et que les premiers travaux s'intéressaient à la relation avec la représentation des groupes algébriques en caractéristique $l = p$. Une autre restriction utilisées dans la littérature est le fait que l est premier avec les coefficients extra-diagonaux de la matrice de Cartan associé à $\mathfrak{g}$. D'après Sawin, ces restrictions orientent l'étude vers des cas très différents de ceux qui sont importants pour étudier la relation des groupes quantiques avec des problèmes en physiques. Une manière de contourner ce problème est de construire un nouveau système de racines à partir de celui associé à l'algèbre de Lie et de travailler avec une version alternative des algèbres enveloppantes quantifiées ([Lus1993], [AP1995]). Ce n'est pas l'approche que nous prendrons dans ce mémoire : nous adaptons les résultats de Lusztig sur $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ pour qu'ils nécessitent le moins de conditions sur l.

Analysons les raisons qui mènent à ces restrictions. La définition de l'algèbre $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ nécessite une matrice $D = (d_i)_{1 \leq i \leq n}$ pour symétriser la matrice de Cartan $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ i.e. telle que DA est symétrique. Il est bien connu qu'une telle matrice D existe pour $\mathfrak{g}$ simple et dans ce cas les conditions sur les coefficients d_i sont plus ou moins équivalentes à des conditions sur les coefficients extra-diagonaux de A. Des expressions de la forme $\epsilon^{d_i k} - \epsilon^{-d_i k}$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont utilisées dans la définition de la spécialisation restreinte, parfois comme dénominateur d'une fraction. Il est facile de voir qu'elles s'annulent quand $2kd_i \equiv 0 \mod l \Leftrightarrow kd_i \equiv 0 \mod m \Leftrightarrow k \equiv 0 \mod m_i$ où $m = l, l/2$ selon la parité de l et $m_i = m / \operatorname{pgcd}(m, d_i)$. Ce paramètre m_i se comporte alors comme une sorte de période et joue un rôle fondamental dans la structure de l'algèbre U_ϵ^{res} et de ses représentations. Il est omniprésent dans les formules, apparaissant parfois sous la forme de signes

$(-1)^{m_i+1}, \epsilon^{d_i m_i} \in \{-1, +1\}$. Lorsque l est impair alors généralement tous ces entiers m_i sont égaux à l et les signes précédents disparaissent. Énoncé de façon plus poétique,

"De la musique avant toute chose,
Et pour cela préfère l'Impair
Plus vague et plus soluble dans l'air,
Sans rien en lui qui pèse ou qui pose."
– Paul Verlaine

Dans un premier chapitre, nous reverrons brièvement quelques définitions et notations nécessaires pour aborder le sujet. En plus des notions élémentaires de la théorie des algèbres de Lie, nous présenterons les q-notations et les algèbres de Hopf.

Nous donnerons dans le second chapitre la définition de l'algèbre $U_q(\mathfrak{g})$ et indiquerons comment elle se spécialise en un certain ϵ. Sans donner les démonstrations de Lusztig, nous indiquerons les bases nécessaire à la construction de ces algèbres de Hopf et énoncerons les décompositions triangulaires. Nous vérifierons néanmoins des relations sur des éléments de $U_q(\mathfrak{g})$ qui seront importantes par la suite. Nous analyserons ensuite quelles propriétés en découlent pour la spécialisation restreinte. Nous obtenons essentiellement les formules de Lusztig où l est remplacé par m_i et où des signes $(-1)^{m_i+1}, \epsilon^{d_i m_i}$ font leur apparition.

Le troisième chapitre traitera des représentations de dimension finie. Nous énoncerons sans preuve les principales propriétés des $U_q(\mathfrak{g})$-modules. Cela est très similaire au cas classique : elles sont complètement réductibles, les modules irréductibles sont paramétrées par un plus haut poids $\lambda \in P^+$ (avec un coefficient $\sigma \in \{-1, +1\}^n$ supplémentaire) et leur caractère est donné par la formule des caractères de Weyl. Plus précisément, les générateurs K_i de la sous-algèbre de Cartan qui nous intéresse agissent sur un vecteur de poids $\lambda' \leq \lambda$ par multiplication par $\sigma_i q^{d_i \lambda'(\alpha_i^\vee)}$. Nous nous tournerons ensuite vers la représentation restreinte. Il est alors nécessaire d'ajouter des éléments $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}$ à la sous-algèbre de Cartan. Finalement, nous retrouvons le cas de $U_q(\mathfrak{g})$ en ce sens que les modules irréductibles $V_\epsilon^{\text{res}}(\sigma, \lambda)$ sont aussi paramétrés par (σ, λ). L'action de K_i, $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}$ sur les espaces de poids $\lambda' \leq \lambda$ est alors donnée respectivement par multiplication par $\sigma_i \epsilon^{d_i \lambda'(\alpha_i^\vee)}$ et $\Delta(\lambda') \left\lfloor \frac{\lambda'(\alpha_i^\vee)}{m_i} \right\rfloor$ pour un certain signe $\Delta(\lambda')$ dépendant entre autre de λ'. Les $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$-modules ne sont toutefois pas complètement réductibles. Ainsi si on spécialise en $q = \epsilon$ un $U_q(\mathfrak{g})$-module irréductible on obtient un $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$-module qui peut être réductible sans être complètement réductible.

La structure d'algèbre de Hopf de $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ donne une façon naturelle de prendre les produits tensoriels de deux $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$-modules. Dans un quatrième et dernier chapitre nous étudierons comment factoriser un $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$-module irréductible $V_\epsilon^{\text{res}}(\sigma, \lambda)$ comme un tel produit tensoriel. Pour cela nous ajouterons l'hypothèse $0 \leq d_i < m$. En écrivant $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$ où pour tout $1 \leq i \leq n$, $0 \leq \lambda_0(\alpha_i^\vee) < m_i$ et $\lambda_1(\alpha_i^\vee) \equiv 0 \mod m_i$. Alors nous obtenons une généralisation de la factorisation de Lusztig :

$$V_\epsilon^{\text{res}}(\sigma, \lambda) \cong V_\epsilon^{\text{res}}(\sigma, 0) \otimes V_\epsilon^{\text{res}}(1, \lambda_0) \otimes V_\epsilon^{\text{res}}(1, \lambda_1)$$

Le facteur $V_\epsilon^{\text{res}}(\sigma, 0)$ est unidimensionel, celui en $V_\epsilon^{\text{res}}(1, \lambda_0)$ est une représentation irréductible d'une sous-algèbre $U_\epsilon^{\text{fin}} \subseteq U_\epsilon^{\text{res}}$ de dimension finie. Avec les hypothèses plus strictes de Lusztig, le troisième facteur s'interprète comme le tiré-en-arrière de la représentation irréductible $V(\lambda_1/l)$ de l'algèbre enveloppante classique $U(\mathfrak{g})$. Mais si l est pair, une telle interprétation a peu de chance de fonctionner à cause justement des signes qui apparaissent. Toutefois, nous proposons une façon de généraliser cette interprétation en considérant le tiré-en-arrière d'une représentation irréductible d'une algèbre enveloppante quantifiée $U_{\epsilon'}^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ pour une certaine racine de l'unité ϵ'. Si l est impair, on retrouve $U_1(\mathfrak{g})$ qui est à peu de chose près l'algèbre enveloppante classique $U(\mathfrak{g})$. Si l est pair mais pas divisible par 4 alors on peut considérer $U_{-1}(\mathfrak{g})$. Plus généralement, il semble que l'on puisse simplement considérer ϵ' d'ordre divisant 24.

Nous définissons ensuite un caractère pour les représentations de dimension finie de $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$. Nous montrons que pour un l arbitraire nous retrouvons les propriétés usuelles du caractère d'une somme directe ou d'un produit tensoriel de représentations. Nous notons comment la factorisation précédente s'applique aux caractères et dans le cas l impair, seul le caractère du second facteur est méconnu.

Enfin dans une dernière partie nous revenons aux restrictions usuelles sur l pour nous intéresser aux tilting modules de $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$. Ceux-ci possèdent des propriétés remarquables de stabilité par somme directe, produit tensoriel et passage au dual et peuvent se décomposer comme une somme directe de tilting modules indécomposables. En travaillant un peu, nous pouvons en déduire une catégorie semi-simple possédant ces propriétés de stabilité.

Chapitre 1

Prérequis

Nous supposerons connues diverses notions nécessaires pour aborder les groupes quantiques et nous en rappelons brièvement certaines dans cette section. Nous utiliserons les notations de cette section, sauf lorsque le contexte indique clairement une exception. Nous renvoyons au chapitre 4 et à l'annexe de [CP1994] pour davantage de détails.

1.1 q-Notations

q désignera une indéterminée comme dans $\mathbb{C}(q)$ ou $\mathbb{Q}(q)$, corps des fractions rationnelles en q à coefficients complexes ou rationnels. On pose aussi $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent. On définit les éléments suivants de $\mathbb{Q}(q)$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, [n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \tag{1.1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, [n]_q! = \prod_{i=0}^{n} [i]_q \tag{1.2}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}, \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{i=1}^{k} \frac{q^{n+1-i} - q^{-(n+1-i)}}{q^i - q^{-i}} \tag{1.3}$$

Il est facile de voir que (1.1) peut se réécrire

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, [-n]_q &= -[n]_q \\ \forall n \in \mathbb{N}, [n]_q &= \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-2k} \end{aligned} \tag{1.4}$$

ce qui montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $[n]_q \in \mathcal{A}$. On en déduit que si $n \in \mathbb{N}$, alors $[n]_q! \in \mathcal{A}$. Si $k, n \in \mathbb{N}$ et si de plus $k \leq n$ on retrouve les égalités classiques

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} \tag{1.5}$$

On vérifie l'équivalence

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}, \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = 0 \Leftrightarrow 0 \leq n \leq k-1 \tag{1.6}$$

Notons aussi les relations

$$\forall m,n\in\mathbb{Z}, [m+n]_q = q^n[m]_q + [n]_q q^{-m} = q^{-n}[m]_q + [n]_q q^m \tag{1.7}$$

$$\forall n\in\mathbb{Z},\forall k\in\mathbb{N}^*, \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = q^{-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q = q^k\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{-(n-k+1)}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{1.8}$$

On remarque que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix}\right]_q = 1$ et $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix}\right]_q = [n]_q$. Alors en utilisant la relation (1.8) on montre par induction sur $(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ que $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q \in \mathcal{A}$. On généralise cela à $n\in\mathbb{Z}$ en notant que

$$\forall n\in\mathbb{Z},\forall k\in\mathbb{N}, \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = (-1)^k\begin{bmatrix} -n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q \tag{1.9}$$

Supposons enfin $n\in\mathbb{N}$. Alors la relation (1.8) permet aussi de montrer par récurrence l'égalité de polynômes à coefficients dans $\mathcal{A}$

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+q^{2k}X\right) = \sum_{k=0}^{n} q^{k(n-1)}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q X^k \tag{1.10}$$

et que, étant donnés x,y appartenant à un anneau contenant $\mathcal{A}$ tels que $yx = q^2xy$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} q^{k(n-k)}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k} \tag{1.11}$$

1.2 Matrice de Cartan symétrisable

Une matrice carrée $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est appelée matrice de Cartan si $\forall i, a_{ii}=2$ et $\forall i\neq j, a_{ij}<0 \vee a_{ij}=a_{ji}=0$.

A est dite symétrisable s'il existe des nombres naturels non nuls $d_1,d_2,...,d_n$ tels que la matrice $(d_ia_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est symétrique i.e. $\forall i,j, d_ia_{ij}=d_ja_{ji}$. On remarque que si les d_i ont un facteur commun, on peut tous les diviser par ce facteur sans changer la propriété précédente. Par conséquent, on suppose de plus que $\mathrm{pgcd}(d_1,d_2,...,d_n)=1$.

A est dite indécomposable s'il n'est pas possible de la réécrire, après multiplication à gauche et à droite par des matrices de permutation, sous la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où A,B sont des matrices carrées non nulles.

Si A est symétrisable, elle est dite de type fini (respectivement affine) si $(d_ia_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est définie positive (respectivement semi-définie positive de rang $n-1$).

1.3 Algèbres de Kac-Moody

Étant donnée une matrice de Cartan A, on notera $\mathfrak{g}(A)$ ou simplement $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Kac-Moody sur $\mathbb{C}$ associée. $\mathfrak{h}$ est sa sous-algèbre de Cartan de dimension $2n-\mathrm{rg}(A)$. Les racines simples seront notées $\alpha_1,...,\alpha_n$ et les coracines $\alpha_1^\vee,...,\alpha_n^\vee$. Les générateurs de Chevalley seront notés X_i^+ et X_i^- $(1\le i\le n)$. On notera enfin $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante correspondante.

On s'intéressera plus particulièrement au cas des algèbres de Lie simples de dimension finie, qui sont les algèbres de Kac-Moody associées à une matrice de Cartan de type fini indécomposable. Dans ce cas, on notera $\langle X,Y\rangle = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{ad}\,Y)$ la forme de Killing associée sur $\mathfrak{g}$. On utilisera la même notation pour la forme bilinéaire correspondante sur son dual $\mathfrak{g}^*$. Si α_i^* est l'élément de $\mathfrak{g}$ tel que $\alpha_i = \langle\alpha_i^*, \_\rangle$ alors $\alpha_i^\vee = \frac{2\alpha_i^*}{\langle\alpha_i^*,\alpha_i^*\rangle}$

et $a_{ij} = \alpha_j(\alpha_i^\vee) = \frac{2\langle\alpha_j^*,\alpha_i^*\rangle}{\langle\alpha_i^*,\alpha_i^*\rangle}$. Ceci montre qu'une symétrisation de la matrice de Cartan est donnée par $d_i = \frac{\langle\alpha_i^*,\alpha_i^*\rangle}{2} = \frac{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}{2}$. Les valeurs explicites sont fournies dans l'annexe A.1.

Notons que la restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}^*$ s'exprime aisément en fonction des a_{ij} et des d_i : $\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j^\vee\rangle = \left\langle \frac{2\alpha_i^*}{\langle\alpha_i^*,\alpha_i^*\rangle}, \frac{2\alpha_j^*}{\langle\alpha_j^*,\alpha_j^*\rangle}\right\rangle = \frac{2}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}\frac{2\langle\alpha_j^*,\alpha_i^*\rangle}{\langle\alpha_i^*,\alpha_i^*\rangle} = d_j^{-1}a_{ij}$ et $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = \langle\alpha_i^*,\alpha_j^*\rangle = a_{ij}\frac{\langle\alpha_i^*,\alpha_i^*\rangle}{2} = d_i a_{ij}$. De plus pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ on a $\langle\lambda,\alpha_i\rangle = d_i\lambda(\alpha_i^\vee)$. Certains auteurs utilisent donc $q^{\langle\lambda,\alpha_i\rangle}$ pour $q_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)}$ ou encore $q^{\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle} = q^{\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}$ pour $q_i^{a_{ij}} = q_j^{a_{ji}}$.

1.4 Racines

Le réseau des racines sera noté $Q = \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$ et celui des poids $P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \forall i, \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}\}$. Q^+, P^+ sont définis de manière similaire, en remplaçant $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{N}$. On note pour tout $1 \leq i \leq n$, $\omega_i \in \mathfrak{h}^*$ les poids élémentaires i.e. tels que $\omega_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$. Alors pour tout $1 \leq j \leq n$,

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\omega_i \tag{1.12}$$

On notera $\Delta = \{\alpha \in Q | \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$, $\Delta^+ = \Delta \cap Q^+$ les racines positives et $\Delta^- = -\Delta^+$ les racines négatives. On a $\Delta = \Delta^+ \bigsqcup \Delta^-$. On notera alors $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$ la demi-somme des racines positives. On notera W le groupe de Weyl agissant sur une algèbre de Lie simple de dimension finie. Pour tout $w \in W$, on note $l(w)$ sa longueur. Si

$$w_0 = s_{i_1}s_{i_2}...s_{i_N} \tag{1.13}$$

est le plus long élément de W, i.e. $N = l(w_0)$ est maximal, alors les racines positives apparaissent exactement une fois dans l'ensemble suivant :

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}), ..., \beta_N = s_{i_1}...s_{i_{N-1}}(\alpha_{i_N}) \tag{1.14}$$

1.5 Algèbre de Hopf

Rappelons qu'une algèbre A sur un anneau commutatif k est un k-module muni d'une multiplication $\mu : A \otimes A \to A$ et d'une unité $i : k \to A$ (qui sont k-linéaires) dont les propriétés peuvent être décrites par les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes k \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes i"] \arrow[d, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & k \otimes A \arrow[l, "i\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\cong"] \\
A \arrow[r, equal] & A & A \arrow[l, equal]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}$$

On définit alors la notion duale de coalgèbre qui est un k-module muni d'applications k-linéaires $\Delta : A \to A \otimes A$ (la comultiplication) et $\epsilon : A \to k$ (la counité) telles que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes k & A \otimes A \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\epsilon"'] \arrow[r, "\epsilon\otimes\mathrm{id}"] & k \otimes A \\
A \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, equal] & A \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[r, equal] & A \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] \\
A \otimes A \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & A \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[l, "\Delta"]
\end{tikzcd}$$

Si A possède à la fois une structure d'algèbre et de coalgèbre, elle est appelée bialgèbre si les Δ, ϵ sont des morphismes d'algèbre. Elle est appelée algèbre de Hopf si elle possède de plus une application k-linéaire bijective $S : A \to A$ (l'antipode) telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "S\otimes\mathrm{id}"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes A \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes S"'] \\
A \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "i\circ\epsilon"] & A & A \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[l, "i\circ\epsilon"']
\end{tikzcd}$$

Une algèbre de Hopf est commutative si la multiplication μ l'est. Si $\tau : A \otimes A \to A$ est défini par $\tau(a_1 \otimes a_2) = a_2 \otimes a_1$ alors la notion duale de cocommutativité est naturellement définie par l'égalité $\tau\Delta = \Delta$.

Étant donnée une algèbre de Hopf A, un k-module V est un A-module s'il existe une application k-linéaire $a \otimes v \mapsto a \cdot v$ de $A \otimes V$ dans V telle que $\mu\,(a_2 \otimes a_1) \cdot v = a_2 \cdot (a_1 \cdot v)$ et $i(1) \cdot v = v$. On dit aussi que $\rho : a \mapsto (v \mapsto a \cdot v)$ est une représentation d'algèbre de Hopf. Si V_1 et V_2 sont deux A-modules on peut munir leur produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ d'une structure de $A \otimes A$-module en faisant agir A sur chaque composante : $a \cdot (v_1 \otimes v_2) = (a \cdot v_1) \otimes (a \cdot v_2)$. On obtient une structure de A-module donnée par

$$a \cdot (v_1 \otimes v_2) = (\Delta a) \cdot (v_1 \otimes v_2) \tag{1.15}$$

La coassociativité de Δ entraine alors l'associativité du produit tensoriel : si V_1, V_2, V_3 sont trois A-modules alors $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$. L'antipode permet aussi de définir une structure de A-module sur le dual $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$. Si $f \in V^*$ et $v \in V$ on pose pour tout $a \in A$

$$(a \cdot f)(v) = f(S(a) \cdot v) \tag{1.16}$$

Chapitre 2

Algèbre enveloppante quantifiée et spécialisations

Nous rappelons dans ce chapitre la construction de Drinfel'd et Jimbo d'algèbres enveloppantes quantifiées puis les formes intégrales et les spécialisations qui en découlent, dues à Lusztig. Nous nous intéressons particulièrement au cas de la spécialisation restreinte qui est l'objet principal de cette étude.

2.1 Forme rationnelle

Notation 2.1.1. Étant donnée une symétrisation $(d_i)_{1\leq i\leq N}$ d'une matrice de Cartan, on pose pour tout $1 \leq i \leq N$, $q_i = q^{d_i}$.

On reprend la définition 9.1.1 de [CP1994] :

Définition 2.1.2. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ une matrice de Cartan symétrisable indécomposable à laquelle on associe l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ et sa symétrisation $(d_i)_{1\leq i\leq N}$. La forme rationnelle adjointe $U_q(\mathfrak{g})$ est l'algèbre sur le corps $\mathbb{Q}(q)$ définie par générateurs $X_i^{\pm}, K_i^{\pm}$ $(1 \leq i \leq N)$ et relations

$$K_iK_j = K_jK_i \tag{2.1}$$

$$K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1 \tag{2.2}$$

$$K_iX_j^{\pm}K_i^{-1} = q_i^{\pm a_{ij}}X_j^{\pm} \tag{2.3}$$

$$X_i^+X_j^- - X_j^-X_i^+ = \delta_{i,j}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \tag{2.4}$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}}(-1)^r\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ r\end{bmatrix}_{q_i}(X_i^{\pm})^{1-a_{ij}-r}X_j^{\pm}(X_i^{\pm})^r = 0 \qquad \text{si } i \neq j, \tag{2.5}$$

Proposition 2.1.3. *Les relations suivantes, munissent $U_q(\mathfrak{g})$ d'une structure d'algèbre de Hopf :*

$$\Delta(K_i^{\pm}) = K_i^{\pm}\otimes K_i^{\pm},$$

$$\Delta(X_i^+) = X_i^+\otimes K_i + 1\otimes X_i^+, \qquad \Delta(X_i^-) = X_i^-\otimes 1 + K_i^{-1}\otimes X_i^-,$$

$$S(K_i^{\pm}) = K_i^{\mp}, \quad S(X_i^+) = -X_i^+ K_i^{-1}, \quad S(X_i^-) = -K_i X_i^-,$$

$$\epsilon(K_i^{\pm}) = 1, \qquad \epsilon(X_i^{\pm}) = 0.$$

Démonstration. On commence d'abord par démontrer les propriétés d'algèbre de Hopf pour les générateurs. Pour chacun des $L = X_i^{\pm}$ ou $L = K_i^{\pm}$, on vérifie aisément la propriété de la counité

$$\begin{aligned}(\epsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(L) &= 1 \otimes L \\ &\cong L \\ &\cong L \otimes 1 \\ &= (\epsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(L)\end{aligned}$$

Pour la coassociativité, le cas $L = K_i^{\pm}$ est facile. Pour le cas $L = X_i^+$ par exemple,

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(X_i^+) &= (X_i^+ \otimes K_i) \otimes K_i + (1 \otimes X_i^+) \otimes K_i + (1 \otimes 1) \otimes X_i^+ \\ &= X_i^+ \otimes (K_i \otimes K_i) + 1 \otimes (X_i^+ \otimes K_i) + 1 \otimes (1 \otimes X_i^+) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(X_i^+)\end{aligned}$$

La propriété de l'antipode est tout aussi facile, par exemple

$$\begin{aligned}X_i^+ S(K_i) + 1S(X_i^+) &= X_i^+ K_i^{-1} - X_i^+ K_i^{-1} \\ &= 0 \\ &= \epsilon(X_i^+)1\end{aligned}$$

On montre ensuite que l'on peut étendre ϵ et Δ en des morphismes d'algèbres et S en un antimorphisme d'algèbre. Pour cela, on vérifie la compatibilité avec les relations définissant l'algèbre. Le cas de ϵ est trivial et il en est de même pour (2.1) et (2.2) en général.

Pour (2.3), on a par exemple

$$\begin{aligned}\Delta K_i \Delta X_j^+ \Delta K_i^- &= K_i X_j K_i^{-1} \otimes K_j + 1 \otimes K_i X_j^+ K_i^{-1} \\ &= q_i^{a_{ij}} \left(X_j^+ \otimes K_j + 1 \otimes X_j^+\right) \\ &= q_i^{a_{ij}} \Delta X_j^+\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}S\left(K_i^{-1}\right) S\left(X_j^+\right) S\left(K_i\right) &= K_i \left(-X_j^+ K_j^{-1}\right) K_i^{-1} \\ &= -q_i^{a_{ij}} X_i^+ K_j^{-1} K_i K_i^{-1} \\ &= q_i^{a_{ij}} S(X_j^+)\end{aligned}$$

En ce qui concerne (2.4), on calcule facilement

$$\left[\Delta X_i^+, \Delta X_j^-\right] = \left[X_i^+, X_j^-\right] \otimes K_i + K_j^{-1} \otimes \left[X_i^+, X_j^-\right] + \left(q^{d_j a_{ji}} - q^{d_i a_{ij}}\right)\left(K_j X_i \otimes K_i X_j^-\right)$$

et

$$\left[S(X_i^+), S(X_j^-)\right] = K_j K_i^{-1}\left(q^{2d_i - d_i a_{ij}} X_j^- X_i^+ - q^{2d_i - d_j a_{ji}} X_i^+ X_j^-\right)$$

En utilisant que $(d_i a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est symétrique on trouve zéro si $i \neq j$ et dans le cas contraire on retrouve bien $\frac{\Delta K_i - \Delta K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$ et $\frac{S(K_i) - S(K_i^{-1})}{q_i - q_i^{-1}}$ respectivement.

Enfin, considérons (2.5) pour le cas +. En faisant un changement d'indice, en utilisant (1.5) puis en déplaçant les K à droite grâce à (2.3) :

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} S(X_i^+)^{1-a_{ij}-r} S(X_j^+) S(X_i^+)^r =$$
$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \left(X_i^+ K_i^{-1}\right)^r \left(X_j^+ K_j^{-1}\right) \left(X_i^+ K_i^{-1}\right)^{1-a_{ij}-r} =$$
$$\left(\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} (X_i^+)^r X_j^- (X_i^+)^{1-a_{ij}-r}\right) K_i^{a_{ij}-1} K_j^{-1} = 0$$

Le cas de Δ est un peu plus long, il est traité dans la démonstration de la proposition 6.5.1 de [CP1994]. □

Remarque 2.1.4. Dans la suite, nous supposerons que $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie. Cela nous permet d'énoncer les résultats de Lusztig concernant les décompositions triangulaires dans la fin de cette section et dans la section suivante, ainsi que de définir la spécialisation restreinte. Notons toutefois que la plupart des résultats ultérieurs n'utiliserons pas directement cette hypothèse et peuvent par conséquent a priori s'étendre à d'autres algèbres de Kac-Moody symétrisables, pourvu que l'on puisse définir la spécialisation restreinte.

Notation 2.1.5. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, notons $(X_i^\pm)^{(r)} = \frac{(X_i^\pm)^r}{[r]_{q_i}!}$.

Définition 2.1.6. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ une matrice de Cartan indécomposable de type fini. On pose m_{ij} égal à 2, 3, 4, 6 ou ∞ selon que $a_{ij}a_{ji}$ est respectivement égal à 0, 1, 2, 3 ou ≥ 4. Le groupe de tresses $\mathcal{B}_g$ associé à A est défini par générateurs T_i (pour $1 \leq i \leq n$) et relations

$$T_i T_j T_i T_j ... = T_j T_i T_j T_i ...$$

pour tout $i \neq j$ satisfaisant $m_{ij} < \infty$, où chaque membre de l'égalité ci-dessus comporte exactement m_{ij} T.

Proposition 2.1.7. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie. Le groupe de tresses $\mathcal{B}_g$ agit par automorphisme de $\mathbb{Q}(q)$-algèbre sur $U_q(\mathfrak{g})$ de la façon suivante :*

$$T_i(X_i^+) = -X_i^- K_i, \quad T_i(X_i^-) = -K_i^{-1} X_i^+, \quad T_i(K_j) = K_j K_i^{-a_{ij}}$$

$$T_i(X_j^+) = \sum_{r=0}^{-a_{ij}} (-1)^{r-a_{ij}} q_i^{-r} (X_i^+)^{(-a_{ij}-r)} X_j^+ (X_i^+)^{(r)} \ \textit{si } i \neq j$$

$$T_i(X_j^-) = \sum_{r=0}^{-a_{ij}} (-1)^{r-a_{ij}} q_i^{r} (X_i^-)^{(r)} X_j^- (X_i^-)^{(-a_{ij}-r)} \ \textit{si } i \neq j$$

Démonstration. cf [Lus1990a] et [Lus1990b] pour les détails. □

Dans le cas classique, on peut définir un vecteur $X_\beta^\pm$ de poids $\pm\beta$ associé à chaque racine positive β. On peut utiliser l'action du groupe de tresses pour généraliser cette définition au cas quantique :

Définition 2.1.8. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie. Fixons une décomposition réduite comme dans (1.13) et définissons les $\beta_1, ...\beta_N$ comme dans (1.14). On définit alors le vecteur de poids β_r par

$$X_{\beta_r}^\pm = T_{i_1} T_{i_2} ... T_{i_{r-1}} (X_{i_r}^\pm)$$

Cela nous permet alors d'obtenir la décomposition triangulaire suivante :

Proposition 2.1.9. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie. Soit U_q^+, U_q^0 et U_q^- les $\mathbb{Q}(q)$-sous algèbres engendrés respectivement par les X_i^+, $K_i^\pm$ et X_i^-.*

(i) La multiplication définit un isomorphisme d'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}(q)$ donné par

$$U_q^- \otimes U_q^0 \otimes U_q^+ \to U_q$$

(ii) Les produits

$$(X^-)^t = (X_{\beta_1}^-)^{t_N}(X_{\beta_2}^-)^{t_2}...(X_{\beta_N}^-)^{t_1}$$

où $t = (t_1, ..., t_N) \in \mathbb{N}^N$ forment une base de U_q^-.

(iii) Les produits

$$K^t = K_1^{t_1} K_2^{t_2}...K_n^{t_n}$$

où $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{Z}^n$ forment une base de U_q^0.

(iv) Les produits

$$(X^+)^t = (X_{\beta_N}^+)^{t_N}...(X_{\beta_2}^+)^{t_2}(X_{\beta_1}^+)^{t_1}$$

où $t = (t_1, ..., t_N) \in \mathbb{N}^N$ forment une base de U_q^+.

Démonstration. Le premier point est démontré dans [Ros1988]. Les autres points proviennent de [Lus1990a] et un résultat plus fort est donné dans la proposition 2.2.9. □

2.2 Formes intégrales

Définition 2.2.1. Une forme intégrale $U_\mathcal{A}$ de U_q est une sous $\mathcal{A}$-algèbre de U_q telle que l'application de $U_\mathcal{A} \otimes_\mathcal{A} \mathbb{Q}(q)$ dans U_q définie par $x \otimes f \mapsto xf$ est un isomorphime de $\mathbb{Q}(q)$-algèbres. Dans ce cas on définit $U_\epsilon = U_\mathcal{A} \otimes_\mathcal{A} \mathbb{C}$ en utilisant le morphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$ envoyant q sur ϵ. On obtient des définitions similaires en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{Q}(\epsilon)$ ou par $\mathbb{Z}[\epsilon, \epsilon^{-1}]$.

Définition 2.2.2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie. $U_\mathcal{A}^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ est la sous $\mathcal{A}$-algèbre de $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les $(X_i^\pm)^{(r)}$ et les $K_i^\pm$ pour $1 \leq i \leq n$ et $r \geq 1$.

Proposition 2.2.3. $U_\mathcal{A}^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ *est une forme intégrale de $U_q(\mathfrak{g})$ et une algèbre de Hopf sur $\mathcal{A}$ déterminée par*

$$\Delta(K_i^\pm) = K_i^\pm \otimes K_i^\pm \tag{2.6}$$

$$\Delta((X_i^+)^{(r)}) = \sum_{k=0}^{r} q_i^{-k(r-k)}(X_i^+)^{(k)} \otimes K_i^k (X_i^+)^{(r-k)} \tag{2.7}$$

$$\Delta((X_i^-)^{(r)}) = \sum_{k=0}^{r} q_i^{k(r-k)}(X_i^-)^{(k)} K_i^{r-k} \otimes (X_i^-)^{(r-k)} \tag{2.8}$$

$$\epsilon(K_i) = 1 \quad \epsilon((X_i^\pm)^{(r)}) = 0 \tag{2.9}$$

$$S(K_i) = K_i^{-1} \tag{2.10}$$

$$S((X_i^+)^{(r)}) = (-1)^r q_i^{r(r+1)} K_i^{-r} (X_i^+)^{(r)} \tag{2.11}$$

$$S((X_i^-)^{(r)}) = (-1)^r q_i^{-r(r+1)} (X_i^-)^{(r)} K_i^r \tag{2.12}$$

Démonstration. Pour la structure d'algèbre de Hopf, on vérifie que les formules données sont la restriction à $U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ des opérations d'algèbre de Hopf. Pour (2.6), (2.9) et (2.10) c'est clair. Pour (2.11) et (2.12), il suffit de déplacer les K à gauche ou à droite, en utilisant (2.3). Enfin pour (2.7) et (2.8), il suffit d'appliquer une version de la formule du binôme (1.11). La démonstration du fait que $U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ est bien une forme intégrale est plus délicate et nécessite la construction d'une base sur cette espace. Nous allons décrire une telle base plus en détails dans cette section. □

Notation 2.2.4. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie. Pour tout $\epsilon \in \mathbb{C}^{\times}$, on définit la spécialisation restreinte correspondant à la forme intégrale $U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ par

$$U_{\epsilon}^{\text{res}}(\mathfrak{g}) = U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{Q}(\epsilon)$$

Commençons par donner à des éléments importants de U_q^0 (en fait aussi de $U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}$, comme on le verra plus loin) une notation spécifique :

Notation 2.2.5. Pour tout $1 \leq i \leq n$, $c \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$, on note

$$\begin{bmatrix} K_i; c \\ r \end{bmatrix}_{q_i} = \prod_{s=1}^{r} \frac{K_i q_i^{c+1-s} - K_i^{-1} q_i^{-(c+1-s)}}{q_i^s - q_i^{-s}} \tag{2.13}$$

On notera l'analogie avec la définition (1.3). Ces éléments possèdent les propriétés suivantes :

Lemme 2.2.6. *Pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a :*

(i) Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $c, c' \in \mathbb{Z}$

$$\begin{bmatrix} K_i; c \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} K_j; c' \\ r' \end{bmatrix}_{q_j} = \begin{bmatrix} K_j; c' \\ r' \end{bmatrix}_{q_j} \begin{bmatrix} K_i; c \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \tag{2.14}$$

$$\begin{bmatrix} K_i; c \\ r \end{bmatrix}_{q_i} K_j = K_j \begin{bmatrix} K_i; c \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \tag{2.15}$$

(ii) Pour tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{bmatrix} K_i; c \\ 0 \end{bmatrix}_{q_i} = 1 \tag{2.16}$$

$$\begin{bmatrix} K_i; c \\ 1 \end{bmatrix}_{q_i} = \frac{K_i q_i^c - K_i^{-1} q_i^{-c}}{q_i - q_i^{-1}} \tag{2.17}$$

(iii)

$$\forall c \in \mathbb{Z}, r \geq 1, \begin{bmatrix} K_i; c \\ r \end{bmatrix}_{q_i} - q_i^{\pm r} \begin{bmatrix} K_i; c+1 \\ r \end{bmatrix}_{q_i} = -q_i^{\pm(c+1)} K_i^{\pm 1} \begin{bmatrix} K_i; c \\ r-1 \end{bmatrix}_{q_i} \tag{2.18}$$

(iv)

$$\forall r \geq 0, c > 0, \begin{bmatrix} K_i; -c \\ r \end{bmatrix}_{q_i} = \sum_{0 \leq s \leq r} (-1)^s q_i^{c(r-s)} \begin{bmatrix} c+s-1 \\ s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^s \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i} \tag{2.19}$$

(v)

$$\forall r \geq 0, c \geq 0, \begin{bmatrix} K_i; c \\ r \end{bmatrix}_{q_i} = \sum_{0 \leq s \leq r} q_i^{c(r-s)} \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^{-s} \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i} \tag{2.20}$$

(vi) Pour $r \geq 0$ et $s \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ r+s \end{bmatrix}_{q_i} = \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} K_i; -r \\ s \end{bmatrix}_{q_i} = \sum_{0 \leq t \leq s} (-1)^t q_i^{r(s-t)} \begin{bmatrix} r+t-1 \\ t \end{bmatrix}_{q_i} K_i^t \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ s-t \end{bmatrix}_{q_i} \tag{2.21}$$

(vii) Pour $r \geq 0$, on a

$$\Delta\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r \end{bmatrix}_{q_i}\right) = \sum_{0\leq s\leq r}\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^s\right)\otimes\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^{s-r}\right) \tag{2.22}$$

Démonstration. (2.14) et (2.15) découlent du fait que les K_i commutent entre eux. (2.16) et (2.17) sont évidents. Pour (2.18), il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} K_i;c \\ r \end{bmatrix}_{q_i} - q_i^{\pm r}\begin{bmatrix} K_i;c+1 \\ r \end{bmatrix}_{q_i} &= \begin{bmatrix} K_i;c \\ r-1 \end{bmatrix}_{q_i} \frac{\left(K_i q_i^{c+1-r} - K_i^{-1}q_i^{-c-1+r}\right) - q_i^{\pm r}\left(K_i q_i^{c+1} - K_i^{-1}q_i^{-c-1}\right)}{q_i^r - q_i^{-r}} \\
&= \begin{bmatrix} K_i;c \\ r-1 \end{bmatrix}_{q_i} \frac{-q_i^{r\pm(c+1)} + q_i^{-r\pm(c+1)}}{q_i^r - q_i^{-r}} K_i^{\pm 1} \\
&= -q_i^{\pm(c+1)} K_i^{\pm 1}\begin{bmatrix} K_i;c \\ r-1 \end{bmatrix}_{q_i}
\end{aligned}$$

(2.19) et (2.20) en découle par induction sur (c, r). Les formules sont évidentes pour $r = 0$. Le cas de $\left[\begin{smallmatrix} K_i;c \\ r \end{smallmatrix}\right]_{q_i}$ est facile à vérifier pour $c = 0$ car (1.6) implique que $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ s \end{smallmatrix}\right]_{q_i} = 0$ pour $s > 0$. Le cas de $\left[\begin{smallmatrix} K_i;-c \\ r \end{smallmatrix}\right]_{q_i}$ en $c = 1$ se traite par une récurrence facile sur r en utilisant la relation (2.18). Soit ensuite $r \geq 0$ et c comme dans les énoncés respectifs. Supposons les formules vraies pour tous couples $(c', r') < (c+1, r)$. Alors

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} K_i;c+1 \\ r \end{bmatrix}_{q_i} &= q_i^r\begin{bmatrix} K_i;c \\ r \end{bmatrix}_{q_i} + q_i^{-c-1+r}K_i^{-1}\begin{bmatrix} K_i;c \\ r-1 \end{bmatrix}_{q_i} \\
&= \sum_{0\leq s\leq r} q_i^{cr-cs+r}\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^{-s}\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i} + \sum_{0\leq s\leq r-1} q_i^{cr-2c-cs+r-1}\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^{-s-1}\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-1-s \end{bmatrix}_{q_i} \\
&= \sum_{0\leq s\leq r} q_i^{cr-cs+r}\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^{-s}\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i} + \sum_{1\leq s\leq r} q_i^{cr-c-cs+r-1}\begin{bmatrix} c \\ s-1 \end{bmatrix}_{q_i} K_i^{-s}\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i} \\
&= q_i^{(c+1)r}\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r \end{bmatrix}_{q_i} + \sum_{1\leq s\leq r} q^{(c+1)(r-s)}\left(q_i^s\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}_{q_i} + q_i^{-(c-s+1)}\begin{bmatrix} c \\ s-1 \end{bmatrix}_{q_i}\right) K_i^{-s}\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i} \\
&= \sum_{0\leq s\leq r} q_i^{(c+1)(r-s)}\begin{bmatrix} c+1 \\ s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^{-s}\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité (1.8) à la dernière ligne. De même,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} K_i;-(c+1) \\ r \end{bmatrix}_{q_i} &= q_i^r \begin{bmatrix} K_i;-c \\ r \end{bmatrix}_{q_i} - q_i^c K_i \begin{bmatrix} K_i;-(c+1) \\ r-1 \end{bmatrix}_{q_i} \\
&= \sum_{0\le s\le r} (-1)^s q_i^{c(r-s)+r} \begin{bmatrix} c+s-1 \\ s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^s \begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i} \\
&+ \sum_{0\le s\le r-1} (-1)^{s+1} q_i^{(c+1)(r-1-s)+c} \begin{bmatrix} (c+1)+s-1 \\ s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^{s+1} \begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-1-s \end{bmatrix}_{q_i} \\
&= \sum_{0\le s\le r} (-1)^s q_i^{c(r-s)+r} \begin{bmatrix} c+s-1 \\ s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^s \begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i} + \sum_{1\le s\le r} (-1)^s q_i^{(c+1)(r-s)+c} \begin{bmatrix} c+s-1 \\ s-1 \end{bmatrix}_{q_i} K_i^s \begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i} \\
&= q_i^{(c+1)r} \begin{bmatrix} K_i;0 \\ r \end{bmatrix}_{q_i} + \sum_{1\le s\le r} (-1)^s q_i^{(c+1)(r-s)} \left(q_i^s \begin{bmatrix} c+s-1 \\ s \end{bmatrix}_{q_i} + q_i^c \begin{bmatrix} c+s-1 \\ s-1 \end{bmatrix}_{q_i} \right) K_i^s \begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i} \\
&= \sum_{0\le s\le r} (-1)^s q_i^{(c+1)(r-s)} \begin{bmatrix} c+1+s-1 \\ s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^s \begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i}
\end{aligned}$$

Cela prouve (2.18) d'où on déduit immédiatement la seconde égalité de (2.21). Pour la première, on écrit

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} K_i;-r \\ s \end{bmatrix}_{q_i} &= \left(\prod_{k=1}^{s} \frac{K_i q_i^{1-k} - K_i^{-1} q_i^{k-1}}{q_i^k - q_i^{-k}} \right) \left(\prod_{k=1}^{s} \frac{K_i q_i^{1-(k+r)} - K_i^{-1} q_i^{(k+r)-1}}{q_i^k - q_i^{-k}} \right) \\
&= \begin{bmatrix} K_i;r+s \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \left(\prod_{k=1}^{s} \frac{q_i^{(k+r)} - q_i^{-(k+r)}}{q_i^k - q_i^{-k}} \right) \\
&= \begin{bmatrix} K_i;r+s \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \left(\prod_{k=1}^{s} \frac{[k+r]_{q_i}}{[k]_{q_i}} \right) \\
&= \begin{bmatrix} K_i;r+s \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \frac{[r+s]_{q_i}!}{[r]_{q_i}![s]_{q_i}!} \\
&= \begin{bmatrix} K_i;r+s \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} r+s \\ s \end{bmatrix}_{q_i}
\end{aligned}$$

Montrons la propriété (2.22) par récurrence sur r. Pour $r=0$ elle s'écrit simplement $\Delta 1 = 1 \otimes 1$. Si la propriété est vraie à l'ordre r alors

$$\Delta\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r+1 \end{bmatrix}_{q_i} \right) = \Delta\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \frac{K_i q_i^{-r} - K_i^{-1} q_i^r}{q_i^{r+1} - q_i^{-(r+1)}} \right) = \Delta\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r \end{bmatrix}_{q_i} \right) \left(\frac{K_i \otimes K_i q_i^{-r} - K_i^{-1} \otimes K_i^{-1} q_i^r}{q_i^{r+1} - q_i^{-(r+1)}} \right) =$$
$$\sum_{s=0}^{r} \left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r-s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^s \otimes \begin{bmatrix} K_i;0 \\ s \end{bmatrix}_{q_i} K_i^{s-r} \right) \frac{q_i^{s-r}\left(K_i \otimes K_i q_i^{-s} - K_i \otimes K_i^{-1} q_i^s\right) + q_i^s\left(K_i \otimes K_i^{-1} q_i^{s-r} - K_i^{-1} \otimes K_i^{-1} q_i^{r-s}\right)}{q_i^{r+1} - q_i^{-(r+1)}}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\begin{bmatrix}K_i;0\\ r+1\end{bmatrix}_{q_i}\right) &= \sum_{s=0}^{r}\left(\begin{bmatrix}K_i;0\\ r-s\end{bmatrix}_{q_i} K_i^{s+1}\otimes \begin{bmatrix}K_i;0\\ s+1\end{bmatrix}_{q_i} K_i^{s-r}\right)\frac{q_i^{s-r}\left(q_i^{s+1}-q_i^{-(s+1)}\right)}{q_i^{r+1}-q_i^{-(r+1)}}\\
&+\sum_{s=0}^{r}\left(\begin{bmatrix}K_i;0\\ r-s+1\end{bmatrix}_{q_i} K_i^{s}\otimes \begin{bmatrix}K_i;0\\ s\end{bmatrix}_{q_i} K_i^{s-r-1}\right)\frac{q_i^{s}\left(q_i^{r-s+1}-q_i^{-(r-s+1)}\right)}{q_i^{r+1}-q_i^{-(r+1)}}\\
&=\sum_{s=1}^{r+1}\left(\begin{bmatrix}K_i;0\\ r+1-s\end{bmatrix}_{q_i} K_i^{s}\otimes \begin{bmatrix}K_i;0\\ s\end{bmatrix}_{q_i} K_i^{s-(r+1)}\right)\frac{q_i^{-r+2s-1}-q_i^{-(r+1)}}{q_i^{r+1}-q_i^{-(r+1)}}\\
&+\sum_{s=0}^{r}\left(\begin{bmatrix}K_i;0\\ (r+1)-s\end{bmatrix}_{q_i} K_i^{s}\otimes \begin{bmatrix}K_i;0\\ s\end{bmatrix}_{q_i} K_i^{s-(r+1)}\right)\frac{q_i^{r+1}-q_i^{-r+2s-1}}{q_i^{r+1}-q_i^{-(r+1)}}\\
&=\sum_{s=0}^{r+1}\left(\begin{bmatrix}K_i;0\\ r+1-s\end{bmatrix}_{q_i} K_i^{s}\otimes \begin{bmatrix}K_i;0\\ s\end{bmatrix}_{q_i} K_i^{s-(r+1)}\right)
\end{aligned}$$

et la propriété est vraie à l'ordre $r+1$. □

Le lemme précédent comporte des formules montrant que l'algèbre engendrée par les K_i et les $\begin{bmatrix}K_i;c\\ r\end{bmatrix}_{q_i}$ pour $1 \leq i \leq n$ est abélienne. Le lemme suivant fournit davantage de relations qui seront importantes pour la suite. Seul le cas $(X_i^{\pm})^{(r)}(X_j^{\pm})^{(s)}$ pour $i \neq j$ n'est pas traité ici : au vu de la relation (2.5), on ne peut espérer une formule générale pour permuter l'ordre des puissances de $X_i^{\pm}$ et de celles des $X_j^{\pm}$. Voir néanmoins le lemme 4.1.2.

Lemme 2.2.7. *(i) Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $c \in \mathbb{Z}$ et $r, s \in \mathbb{N}$ on a $K_i(X_j^{\pm})^{(s)} = q_i^{\pm s a_{ij}}(X_j^{\pm})^{(s)}K_i$ et*

$$\begin{bmatrix}K_i;c\\ r\end{bmatrix}_{q_i}(X_j^{\pm})^{(s)} = (X_j^{\pm})^{(s)}\begin{bmatrix}K_i;c\pm a_{ij}s\\ r\end{bmatrix}_{q_i} \tag{2.23}$$

(ii) Pour tout $r, s \in \mathbb{N}$ et $0 \leq i \neq j \leq n$ on a

$$(X_i^{+})^{(r)}(X_j^{-})^{(s)} = (X_j^{-})^{(s)}(X_i^{+})^{(r)} \tag{2.24}$$

(iii) Pour tout $r, s \in \mathbb{N}$ et $0 \leq i \leq n$ on a

$$(X_i^{+})^{(r)}(X_i^{-})^{(s)} = \sum_{0\leq t\leq r,s}(X_i^{-})^{(s-t)}\begin{bmatrix}K_i;2t-s-r\\ t\end{bmatrix}_{q_i}(X_i^{+})^{(r-t)} \tag{2.25}$$

$$(X_i^{\pm})^{(r)}(X_i^{\pm})^{(s)} = \begin{bmatrix}r+s\\ r\end{bmatrix}_{q_i}(X_i^{\pm})^{(r+s)} = (X_i^{\pm})^{(s)}(X_i^{\pm})^{(r)} \tag{2.26}$$

Démonstration. On a déjà utilisé plusieurs fois la première relation qui provient de (2.3). La relation (2.23) en découle immédiatement. (2.24) est évident car X_i^{+} et X_j^{-} commutent si $i \neq j$ d'après (2.4). La relation (2.26) est aussi facile.

Intéressons nous à (2.25). On peut supposer $r, s \geq 1$ car le résultat est trivial si r ou s est nul. On commence ensuite par démontrer par récurrence sur s dans le cas $r = 1$ i.e.

$$X_i^{+}(X_i^{-})^{(s)} = (X_j^{-})^{(s)}X_i^{+} + (X_j^{-})^{(s-1)}\begin{bmatrix}K_i;1-s\\ 1\end{bmatrix}_{q_i} \tag{2.27}$$

Pour $s = 1$, c'est exactement (2.4). Si le résultat est vrai pour $s \geq 1$ alors

$$
\begin{aligned}
X_i^+(X_i^-)^{(s+1)} &= X_i^+(X_i^-)^{(s)}\frac{X_i^-}{[s+1]_{q_i}}\\
&= \frac{(X_i^-)^{(s)}}{[s+1]_{q_i}}X_i^+X_i^- + \frac{(X_i^-)^{(s-1)}}{[s+1]_{q_i}}\begin{bmatrix}K_i;1-s\\1\end{bmatrix}_{q_i}X_i^-\\
&= \frac{(X_i^-)^{(s)}}{[s+1]_{q_i}}\left(X_i^-X_i^+ + \frac{K_i-K_i^{-1}}{q_i-q_i^{-1}}\right) + \frac{(X_i^-)^{(s-1)}}{[s+1]_{q_i}}X_i^-\begin{bmatrix}K_i;-1-s\\1\end{bmatrix}_{q_i}\\
&= (X_i^-)^{(s+1)}X_i^+ + (X_i^-)^{(s)}\frac{\left(\frac{1+[s]_{q_i}q_i^{-1-s}}{[s+1]_{q_i}}\right)K_i - \left(\frac{1+[s]_{q_i}q_i^{s+1}}{[s+1]_{q_i}}\right)K_i^{-1}}{q_i-q_i^{-1}}\\
&= (X_i^-)^{(s+1)}X_i^+ + (X_i^-)^{(s)}\begin{bmatrix}K_i;-s\\1\end{bmatrix}_{q_i}
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé l'hypothèse de récurrence pour passer à la seconde ligne, (2.4) et (2.23) pour passer à la troisième ligne et finalement la relation (1.7) pour conclure.

On fixe maintenant s et on démontre le résultat par récurrence sur r. Pour $r=1$, on vient de le faire. Si le résultat est vrai pour $r \geq 1$ alors dans le calcul qui suit, on peut utiliser la relation de récurrence pour passer à la seconde ligne. Pour passer à la troisième ligne, on peut aussi utiliser (2.27) si $s-t>0$ et la même formule sans le second terme si $t=s$.

$$
\begin{aligned}
(X_i^+)^{(r+1)}(X_i^-)^{(s)} &= \frac{X_i^+}{[r+1]_{q_i}}(X_i^+)^{(r)}(X_i^-)^{(s)}\\
&= \sum_{0\le t\le r,s} X_i^+(X_i^-)^{(s-t)}\begin{bmatrix}K_i;2t-s-r\\t\end{bmatrix}_{q_i}\frac{(X_i^+)^{(r-t)}}{[r+1]_{q_i}}\\
&= \sum_{0\le t\le r,s}\left((X_i^-)^{(s-t)}X_i^+ + (1-\delta_{s,t})(X_i^-)^{(s-t-1)}\begin{bmatrix}K_i;1-s+t\\1\end{bmatrix}_{q_i}\right)\begin{bmatrix}K_i;2t-s-r\\t\end{bmatrix}_{q_i}\frac{(X_i^+)^{(r-t)}}{[r+1]_{q_i}}\\
&= \sum_{0\le t\le r,s}(X_i^-)^{(s-t)}\begin{bmatrix}K_i;2t-s-r-2\\t\end{bmatrix}_{q_i}X_i^+\frac{(X_i^+)^{(r-t)}}{[r+1]_{q_i}}\\
&+ \sum_{0\le t\le r,s}(1-\delta_{s,t})(X_i^-)^{(s-t-1)}\begin{bmatrix}K_i;1-s+t\\1\end{bmatrix}_{q_i}\begin{bmatrix}K_i;2t-s-r\\t\end{bmatrix}_{q_i}\frac{(X_i^+)^{(r-t)}}{[r+1]_{q_i}}\\
&= \sum_{0\le t\le r,s}(X_i^-)^{(s-t)}\frac{\left[\begin{smallmatrix}K_i;2t-s-r-2\\t\end{smallmatrix}\right]_{q_i}[r+1-t]_{q_i}}{[r+1]_{q_i}}(X_i^+)^{(r+1-t)}\\
&+ \sum_{1\le t\le r+1,s+1}(1-\delta_{s+1,t})(X_i^-)^{(s-t)}\frac{\left[\begin{smallmatrix}K_i;t-s\\1\end{smallmatrix}\right]_{q_i}\left[\begin{smallmatrix}K_i;2t-s-r-2\\t-1\end{smallmatrix}\right]_{q_i}}{[r+1]_{q_i}}(X_i^+)^{(r+1-t)}
\end{aligned}
$$

Le terme en $t=0$ est bien $1=\left[\begin{smallmatrix}K_i;0-s-(r+1)\\0\end{smallmatrix}\right]_{q_i}$ comme souhaité. Si $s\le r$, alors le plus grand indice est $t=s+1$ pour lequel le terme correspondant est nul. On peut donc en fait prendre pour borne $t\le s=\min(r+1,s)$. Si $r\le s$ alors le plus grand indice est $t=r+1$ qui correspond au terme

$$\frac{K_i q_i^{r+1-s} - K_i^{-1} q_i^{-r-1+s}}{q_i^{r+1} - q_i^{-r-1}} \prod_{l=1}^{r} \frac{K_i q_i^{r+1-s-l} - K^{-1} q_i^{-r-1+s+l}}{q_i^{l} - q_i^{-l}} =$$

$$\prod_{l=1}^{r+1} \frac{K_i q_i^{r+2-s-l} - K_i^{-1} q_i^{-r-2+s+l}}{q_i^{l} - q_i^{-l}} = \begin{bmatrix} K_i; 2(r+1) - s - (r+1) \\ r+1 \end{bmatrix}_{q_i}$$

Enfin, les termes correspondant à $1 \leq t \leq r, s$ sont

$$\begin{bmatrix} K_i; 2t - s - r - 2 \\ t-1 \end{bmatrix}_{q_i} \frac{1}{[r+1]_{q_i}} \left([r+1-t]_{q_i} \frac{K_i q_i^{t-s-r-1} - K_i^{-1} q_i^{-t+s+r+1}}{q_i^{t} - q_i^{-t}} + \begin{bmatrix} K_i; t-s \\ 1 \end{bmatrix}_{q_i} \right)$$

après simplification, on trouve

$$\begin{bmatrix} K_i; 2t - s - r - 2 \\ t-1 \end{bmatrix}_{q_i} \frac{K_i q_i^{2t-s-r-1} - K_i^{-1} q_i^{-2t+s+r+1}}{q_i^{t} - q_i^{-t}} = \begin{bmatrix} K_i; 2t - s - (r+1) \\ t \end{bmatrix}_{q_i}$$

□

Lemme 2.2.8. *Pour tout $i = 1, ..., n$ on a $T_i(U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}) = U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $T_i^{\pm}(U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}) \subseteq U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$. Par exemple

$$T_i(K_j) = K_j K_i^{-a_{ij}} \in U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$$
$$T_i((X_i^{+})^{(r)}) = (-1)^r q^{d_i r(r+1)} K_i^r (X_i^{-})^{(r)} \in U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$$
$$T_i((X_i^{-})^{(r)}) = (-1)^r q^{-d_i r(r+1)} K_i^r (X_i^{+})^{(r)} \in U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$$

cf [Lus1990a] et [Lus1990b] pour les détails. □

Comme par définition $(X_i^{\pm})^{(r)} \in U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$, le lemme 2.2.8 montre que a fortiori $(X_{\beta}^{\pm})^{(r)} \in U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$. De même, on peut maintenant facilement montrer par récurrence sur $r \geq 0$ que $\left[\begin{smallmatrix} K_i; c \\ r \end{smallmatrix}\right]_{q_i} \in U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$. C'est évident pour $r = 0$. Si c'est vrai pour tout entier $< r$ alors d'après (2.25) on a

$$\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ r \end{bmatrix}_{q_i} = (X_i^{+})^{(r)} (X_i^{-})^{(r)} - \sum_{0 \leq t \leq r-1} (X_i^{-})^{(r-t)} \begin{bmatrix} K_i; 2(t-r) \\ t \end{bmatrix}_{q_i} (X_i^{+})^{(r-t)} \in U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$$

On en déduit alors $\left[\begin{smallmatrix} K_i; c \\ r \end{smallmatrix}\right]_{q_i} \in U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$ pour tout $c \in \mathbb{Z}$ en utilisant les formules (2.19) et (2.20) . Donc la propriété est vraie à l'ordre r.

Nous avons donc des éléments de $U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$ satisfaisant certaines relations de commutation. En étudiant précisément l'action du groupe de tresses, on obtient la décomposition triangulaire suivante :

Proposition 2.2.9. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie. Soit $U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}+}$ la $\mathcal{A}$ sous-algèbre engendrée par les X_i^{+}, $U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}-}$ celle engendrée par les X_i^{-} et enfin $U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}0}$ celle engendrée par les $K_i^{\pm}$ et les $\left[\begin{smallmatrix} K_i; c \\ r \end{smallmatrix}\right]_{q_i}$.*

(i) La multiplication définit un isomorphisme de modules sur $\mathcal{A}$ donné par

$$U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}-} \otimes U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}0} \otimes U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}+} \to U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$$

(ii) Les produits

$$(X_{\beta_1}^{-})^{(t_N)} (X_{\beta_2}^{-})^{(t_2)} ... (X_{\beta_N}^{-})^{(t_1)}$$

où $t = (t_1, ..., t_N) \in \mathbb{N}^N$ forment une $\mathcal{A}$-base de $U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}-}$ et une $\mathbb{Q}(q)$-base de U_q^{-}.

(iii) Les produits

$$(X^+_{\beta_N})^{(t_N)} ... (X^+_{\beta_2})^{(t_2)} (X^+_{\beta_1})^{(t_1)}$$

où $t = (t_1, ..., t_N) \in \mathbb{N}^N$ forment une $\mathcal{A}$-base de $U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}+}$ et une $\mathbb{Q}(q)$-base de U_q^+.

(iv) Les produits

$$\prod_{i=1}^{n} K_i^{\sigma_i} \begin{bmatrix} K_i ; 0 \\ s_i \end{bmatrix}_{q_i}$$

où $s_1, ... s_n \in \mathbb{N}$ et $\sigma_i \in \{0, 1\}$ forment $\mathcal{A}$-base de $U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}0}$ et une $\mathbb{Q}(q)$-base de U_q^0.

Démonstration. cf [Lus1990a] et [Lus1990b]. □

2.3 Spécialisation restreinte

Nous avons défini dans la section précédente la spécialisation restreinte à partir de la sous $\mathcal{A}$-algèbre $U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ de $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les $(X_i^{\pm})^{(r)} = \frac{(X_i^{\pm})^r}{[r]_{q_i}!}$ et les $K_i^{\pm}$ pour $1 \leq i \leq n$. On a $(X_i^{\pm})^{(1)} = X_i^{\pm}$ et on a vu que $\left[\begin{smallmatrix} K_i ; c \\ 1 \end{smallmatrix}\right]_{q_i} \in U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$. L'annexe B.1 explique comment définir la spécialisation non-restreinte à partir de l'algèbre $U_{\mathcal{A}}$ engendrée par les $X_i^{\pm}, K_i^{\pm 1}$ et $\left[\begin{smallmatrix} K_i ; 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]_{q_i}$. Il est en réalité facile de voir que ces deux spécialisations coïncident si et seulement si ϵ n'est pas une racine de l'unité ou bien lorsque $\epsilon = \pm 1$. Le premier cas est bien connu et on obtient des résultats similaires à $U_q(\mathfrak{g})$: toutes les représentations sont complètement réductibles et les représentations irréductibles sont classifiées par un plus haut poids. Le cas $\epsilon = \pm 1$ est inclus dans l'étude qui va suivre. L'annexe B.2 contient une analyse directe à partir de la spécialisation non-restreinte.

Notation 2.3.1. Dans la suite, on note ϵ une racine de l'unité d'ordre $l \in \mathbb{N}^*$. On pose $m = \frac{l}{2}$ si l pair et $m = l$ sinon. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose $\epsilon_i = \epsilon^{d_i}$, $\delta_i = \mathrm{pgcd}(d_i, m)$, et $m_i = \frac{m}{\delta_i}$.

Proposition 2.3.2. *(i) Pour tout $1 \leq i \leq n$ et $r \in \mathbb{Z}$,*

$$\epsilon_i^r - \epsilon_i^{-r} = 0 \Leftrightarrow r \equiv 0 \mod m_i \tag{2.28}$$

(ii) Si $m_i = 1$, alors pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$[r]_{\epsilon_i} = 0 \Leftrightarrow r = 0 \tag{2.29}$$

et plus précisément

$$[r]_{\epsilon_i} = (\epsilon_i)^{r-1} r \tag{2.30}$$

(iii) Sinon $m_i > 1$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$:

$$[r]_{\epsilon_i} = 0 \Leftrightarrow r \equiv 0 \mod m_i \tag{2.31}$$

et si $r = m_i r_1 + r_0$ est la division euclidienne de r par m_i, on a

$$[r]_{\epsilon_i} = (\epsilon_i^{m_i})^{r_1} [r_0]_{\epsilon_i} \tag{2.32}$$

Démonstration. La relation (2.28) est facile et en particulier $\epsilon_i^{2m_i} = 1$. Rappelons ensuite que

$$[r]_{q_i} = \frac{q_i^r - q_i^{-r}}{q_i - q_i^{-1}} = \sum_{k=0}^{r-1} q_i^{r-1-2k}$$

Si $m_i = 1$, alors $\epsilon_i^2 = 1$ et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ on obtient $[r]_{\epsilon_i} = \sum_{k=0}^{r-1} \epsilon_i{}^{(r-1)} = \epsilon_i{}^{(r-1)} r$. On en déduit alors la relation (2.30). Sinon $m_i > 1$ et alors la relation (2.28) entraine $\epsilon_i - \epsilon_i^{-1} \neq 0$. On a donc $[r]_{\epsilon_i} = \frac{\epsilon_i^r - \epsilon_i^{-r}}{\epsilon_i - \epsilon_i^{-1}}$ et en utilisant à nouveau (2.28) on obtient la relation (2.31). On peut évaluer

$$[r]_{q_i} = q_i^{m_i r_1} \frac{q_i^{r_0} - q_i^{-r_0} q_i^{-2m_i r_1}}{q_i - q_i^{-1}}$$

en $q = \epsilon$ et on obtient la factorisation (2.32).

□

Remarque 2.3.3. Pour satisfaire $m_i > 1$, il suffit de supposer $1 \leq d_i < m$. L'annexe A.1 montre que pour les algèbres de Lie simple de dimension finie on a $d_i \in \{1, 2, 3\}$ donc cela est vrai pour $l \geq 7$. On rencontre aussi souvent le cas l impair et premier à 3 si $\mathfrak{g}$ est de type G_2. Dans ce cas, $l = m = m_i$, $\epsilon_i^{m_i} = 1$ et $\delta_i = 1$ ce qui simplifie beaucoup les calculs. Nous essayons ici de rester dans le cas général et n'ajouterons pas de restrictions sur l.

Énonçons quelques propriétés très simples qui seront utiles par la suite :

Lemme 2.3.4. *(i)* $\epsilon^{2m} = 1$ *et*

$$\epsilon^m = (-1)^{l+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } l \text{ est impair} \\ -1 & \text{si } l \text{ est pair} \end{cases} \tag{2.33}$$

(ii) $\epsilon_i^{2m_i} = 1$ *et*

$$\epsilon_i^{m_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } l \text{ impair ou si } \frac{d_i}{\delta_i} \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon (en particulier si } m_i \text{ est pair)} \end{cases} \tag{2.34}$$

On en déduit

$$(\epsilon_i^{m_i})^{m_i} = (-1)^{(m_i+1)} \epsilon_i^{m_i} \tag{2.35}$$

Si de plus $d_i \in \{1, 2, 3\}$ *alors*

$$\epsilon_i^{m_i} = (-1)^{(l+1)(m+1)} \left((-1)^{(l+1)m}\right)^{d_i} \tag{2.36}$$

(iii) Les racines m_i*-ième de l'unité sont données par :*

$$U_{m_i} = \left\{\epsilon_i^{2r} | 0 \leq r < m_i\right\} \tag{2.37}$$

(iv) Les racines $2m_i$*-ième de l'unité sont données par :*

$$U_{2m_i} = \{\pm \epsilon_i^r | 0 \leq r < m_i\} \tag{2.38}$$

Démonstration. Pour le premier point, si l est impair, $\epsilon^m = \epsilon^l = 1$ et a fortiori $\epsilon^{2m} = 1$. Si l est pair, on a toujours $\epsilon^{2m} = \epsilon^l = 1$ donc $\epsilon^m \in \{-1, +1\}$. Mais ϵ est une racine l-ième primitive et $m = l/2 < l$. Donc $\epsilon^m = -1$.

Le deuxième point découle de la relation $\epsilon_i^{m_i} = (\epsilon^m)^{\frac{d_i}{\delta_i}}$. On distingue deux cas : $\epsilon_i^{m_i} = 1$ si l est impair ou $\frac{d_i}{\delta_i}$ est pair et $\epsilon_i^{m_i} = -1$ sinon. En particulier $\epsilon_i^{2m_i} = 1$. On remarque que si m_i est pair alors l l'est a fortiori. De plus $\mathrm{pgcd}(\frac{d_i}{\delta_i}, m_i) = 1$ donc $\frac{d_i}{\delta_i}$ est impair. Par conséquent $\epsilon_i^{m_i} = -1$. En ce qui concerne $(\epsilon_i^{m_i})^{m_i}$, on doit trouver $(\epsilon_i^{m_i})$ si m_i est impair et 1 si m_i est pair. Or, on vient de voir que dans ce dernier cas $\epsilon_i^{m_i} = -1$. Donc $(\epsilon_i^{m_i})^{m_i} = (-1)^{(m_i+1)} \epsilon_i^{m_i}$. Par un raisonnement au cas par cas similaire, on déduit (2.36).

Si l est pair alors $U_{m_i} = U_{\frac{l}{2\delta_i}} = \{\epsilon^{2\delta_i r} | 0 \leq r < m_i\}$. Comme m_i est premier avec $\frac{d_i}{\delta_i}$ on peut écrire cet ensemble $U_{m_i} = \{\epsilon_i^{2r} | 0 \leq r < m_i\}$. Si m_i est impair, alors on peut même l'écrire $U_{m_i} = \{\epsilon_i^r | 0 \leq r < m_i\}$ et alors $U_{2m_i} = \pm U_{m_i} = \{\pm \epsilon_i^r | 0 \leq r < m_i\}$. Sinon, m_i est pair. Donc $\frac{d_i}{\delta_i}$ est premier avec $2m_i$ et $U_{2m_i} =$

$U_{\frac{l}{\delta_i}} = \{\epsilon^{\delta_i r} | 0 \leq r < 2m_i\} = \{\epsilon_i^r | 0 \leq r < 2m_i\}$. Maintenant, $\epsilon_i^{m_i} = -1$ donc pour tout $0 \leq r < m_i$ on a $\epsilon_i^{m_i+r} = -\epsilon_i^r$. A nouveau, $U_{2m_i} = \{\pm\epsilon_i^r | 0 \leq r < m_i\}$.

Si l est impair, $m_i = l/\delta_i$ l'est a fortiori et donc $U_{2m_i} = \pm U_{m_i}$. On a $U_{m_i} = U_{\frac{l}{\delta_i}} = \{\epsilon^{\delta_i r} | 0 \leq r < m_i\}$. Comme m_i est premier avec $\frac{d_i}{\delta_i}$, on peut écrire $U_{m_i} = \{\epsilon_i^r | 0 \leq r < m_i\}$. Comme 2 est premier à m_i, on peut aussi écrire cet ensemble $U_{m_i} = \{\epsilon_i^{2r} | 0 \leq r < m_i\}$. □

Comme $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}_q \in \mathcal{A}$ pour tout $r, s \in \mathbb{N}$, on peut sans problème l'évaluer en $\epsilon_i \neq 0$. Le lemme suivant donne une formule pour exprimer cette valeur en fonction de $\begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$ avec $0 \leq r_0, s_0 < m_i$. Il généralise la formule donnée dans la proposition 3.2 de [Lus1989] :

Lemme 2.3.5. *Soit $s, r \in \mathbb{N}$ avec $s \leq r$ et dont les divisions euclidiennes par m_i s'écrivent $r = m_i r_1 + r_0$ et $s = m_i s_1 + s_0$ alors*

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}_{\epsilon_i} = \begin{cases} \binom{r_1}{s_1} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix}_{\epsilon_i} & si\ \epsilon_i^{m_i} = 1 \\ (-1)^{r_1 s_0 + r_0 s_1} \binom{r_1}{s_1} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix}_{\epsilon_i} & si\ \epsilon_i^{m_i} = -1\ et\ m_i\ pair \\ (-1)^{(r_1+1)s_1 + r_1 s_0 + r_0 s_1} \binom{r_1}{s_1} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix}_{\epsilon_i} & si\ \epsilon_i^{m_i} = -1\ et\ m_i\ impair \end{cases} \tag{2.39}$$

que l'on peut aussi écrire

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}_{\epsilon_i} = (-1)^{(m_i+1)(r_1+1)s_1} (\epsilon_i^{m_i})^{(r_1+1)s_1 + r_1 s_0 + r_0 s_1} \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix}_{\epsilon_i} \tag{2.40}$$

Démonstration. On commence par écrire l'égalité de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}(\epsilon)$:

$$\prod_{k=0}^{m_i-1} \left(1 + \epsilon_i^{2k} X\right) = \epsilon_i^{m_i(m_i-1)} \prod_{k=0}^{m_i-1} \left(X - (-\epsilon_i^{-2k})\right)$$

D'après (2.37), ϵ_i^{-2k} parcourt U_{m_i} quand k parcourt $0, ..., m_i - 1$. Donc $-\epsilon_i^{-2k}$ parcourt les racines m_i-ième de $(-1)^{m_i}$ et le produit vaut donc

$$\epsilon_i^{m_i(m_i-1)} \left(X^{m_i} - (-1)^{m_i}\right) = (-1)^{m_i+1} \left(X^{m_i} + (-1)^{m_i+1}\right) \tag{2.41}$$

Considérons $r \in \mathbb{N}$ et soit $r = m_i r_1 + r_0$ la division euclidienne de r par m_i. Rappelons que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = 0$ si $k > n$. On utilise alors (1.10) :

$$\begin{aligned} \prod_{s=0}^{r-1} \left(1 + \epsilon_i^{2s} X\right) &= \sum_{s=0}^{r} \epsilon_i^{s(r-1)} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}_{\epsilon_i} X^s \\ &= \left(\sum_{s_1=0}^{r_1-1} \left(\sum_{s_0=0}^{m_i-1} \epsilon_i^{(m_i s_1 + s_0)(m_i r_1 + r_0 - 1)} \begin{bmatrix} m_i r_1 + r_0 \\ m_i s_1 + s_0 \end{bmatrix}_{\epsilon_i} X^{m_i s_1 + s_0} \right) \right) \\ &+ \sum_{s_0=0}^{r_0} \epsilon_i^{(m_i r_1 + s_0)(m_i r_1 + r_0 - 1)} \begin{bmatrix} m_i r_1 + r_0 \\ m_i r_1 + s_0 \end{bmatrix}_{\epsilon_i} X^{m_i r_1 + s_0} \\ &= \sum_{s_1=0}^{r_1} \left(\sum_{s_0=0}^{m_i-1} \epsilon_i^{(m_i s_1 + s_0)(m_i r_1 + r_0 - 1)} \begin{bmatrix} m_i r_1 + r_0 \\ m_i s_1 + s_0 \end{bmatrix}_{\epsilon_i} X^{m_i s_1 + s_0} \right) \end{aligned}$$

Alors (2.41) et (1.10) donnent :

$$\prod_{s=0}^{r-1}\left(1+\epsilon_i^{2s}X\right) = \left((-1)^{m_i+1}\left(X^{m_i}+(-1)^{m_i+1}\right)\right)^{r_1}\prod_{s_0=0}^{r_0-1}\left(1+\epsilon_i^{2s_0}X\right)$$
$$= (-1)^{(m_i+1)r_1}\left(\sum_{s_1=0}^{r_1}\binom{r_1}{s_1}(-1)^{(m_i+1)(r_1-s_1)}X^{m_is_1}\right)\sum_{s_0=0}^{r_0}\epsilon_i^{s_0(r_0-1)}\begin{bmatrix} r_0\\ s_0\end{bmatrix}_{\epsilon_i}X^{s_0}$$
$$= \sum_{s_1=0}^{r_1}\left(\sum_{s_0=0}^{m_i-1}(-1)^{(m_i+1)s_1}\epsilon_i^{s_0(r_0-1)}\binom{r_1}{s_1}\begin{bmatrix} r_0\\ s_0\end{bmatrix}_{\epsilon_i}X^{m_is_1+s_0}\right)$$

En identifiant les termes de degré $s = m_is_1 + s_0$, on trouve

$$\begin{bmatrix} r\\ s\end{bmatrix}_{\epsilon_i} = \epsilon_i^{-(m_is_1+s_0)(m_ir_1+r_0-1)}(-1)^{(m_i+1)s_1}\epsilon_i^{s_0(r_0-1)}\binom{r_1}{s_1}\begin{bmatrix} r_0\\ s_0\end{bmatrix}_{\epsilon_i}$$

En utilisant (2.35), on peut simplifier le facteur en $(-1)^{(m_i+1)(r_1+1)s_1}(\epsilon_i^{m_i})^{(r_1+1)s_1+r_1s_0+r_0s_1}$. On déduit alors facilement les autres expressions en simplifiant selon la parité de m_i et le signe de $\epsilon_i^{m_i}$. □

Lorsque l'on spécialise en ϵ, les générateurs de l'algèbre possèdent des propriétés supplémentaires qui seront utiles pour l'étude des représentations . Le lemme 2.3.6 montre comment les $\left[\begin{smallmatrix} K_i;0\\ r\end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}$ s'expriment en fonction des $K_i^{\pm}$ et de $\left[\begin{smallmatrix} K_i;0\\ m_i\end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}$ et les $(X_i^{\pm})^{(r)}$ en fonction des $X_i^{\pm}$ et des $(X_i^{\pm})^{(m_i)}$. De même, la proposition 2.3.7 montre quelques propriétés des puissances des $X_i^{\pm}$ et des K_i.

Lemme 2.3.6. *(i) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, $0 \le r < m_i$ on a*

$$\begin{bmatrix} K_i;0\\ r\end{bmatrix}_{\epsilon_i} = \prod_{s=1}^{r}\frac{K_i\epsilon_i^{1-s}-K_i^{-1}\epsilon_i^{s-1}}{\epsilon_i^{s}-\epsilon_i^{-s}} \tag{2.42}$$

(ii) Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{bmatrix} K_i;0\\ pm_i\end{bmatrix}_{\epsilon_i} = \frac{1}{p!}(\epsilon_i^{m_i})^p\prod_{s=0}^{p-1}\left(\begin{bmatrix} K_i;0\\ m_i\end{bmatrix}_{\epsilon_i} - \epsilon_i^{m_i}K_i^{m_i}s\right) \tag{2.43}$$

(iii) Pour $0 \le r < m_i$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{bmatrix} K_i;0\\ pm_i+r\end{bmatrix}_{\epsilon_i} = \begin{bmatrix} K_i;0\\ pm_i\end{bmatrix}_{\epsilon_i}\begin{bmatrix} K_i;0\\ r\end{bmatrix}_{\epsilon_i} \tag{2.44}$$

(iv) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, $0 \le r < m_i$ on a

$$(X_i^{\pm})^{(r)} = \frac{(X_i^{\pm})^r}{[r]_{\epsilon_i}!} \tag{2.45}$$

(v) Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(X_i^{\pm})^{(pm_i)} = \frac{1}{p!}(\epsilon_i^{m_i})^{\left(\frac{(p+2)(p+1)}{2}\right)}\left((X_i^{\pm})^{(m_i)}\right)^p \tag{2.46}$$

(vi) Pour $0 \le r < m_i$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$(X_i^{\pm})^{(pm_i+r)} = (\epsilon_i^{m_i})^{pr}(X_i^{\pm})^{(pm_i)}(X_i^{\pm})^{(r)} \tag{2.47}$$

Démonstration. L'égalité (2.42) est simplement la définition (2.13) évaluée en $c = 0$ et $q = \epsilon$ et (2.45) la notation 2.1.5 évaluée en $q = \epsilon$. Il faut juste s'assurer que cela a un sens c'est-à-dire que les dénominateurs ne s'annulent pas. C'est le cas si $0 \le r < m_i$, grâce à (2.31). De même, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $0 < s < m_i$, $pm_i + s$ n'est pas un multiple de m_i et on peut alors écrire

$$\frac{K_i\epsilon_i^{1-(pm_i+s)} - K_i^{-1}\epsilon_i^{(pm_i+s)-1}}{\epsilon_i^{pm_i+s} - \epsilon_i^{-(pm_i+s)}} = \frac{\epsilon_i^{pm_i}\left(K_i\epsilon_i^{1-(s+2pm_i)} - K_i^{-1}\epsilon_i^{s-1}\right)}{\epsilon_i^{pm_i}\left(\epsilon_i^{s} - \epsilon_i^{-s-2pm_i}\right)} = \frac{K_i\epsilon_i^{1-s} - K_i^{-1}\epsilon_i^{s-1}}{\epsilon_i^{s} - \epsilon_i^{-s}}$$

ce qui permet de prouver (2.44).

En ce qui concerne (2.43), le cas $p = 0$ est évident donc on suppose $p \geq 1$. La formule (2.21) du lemme 2.2.6 donne

$$\begin{bmatrix}(p+1)m_i \\ pm_i\end{bmatrix}_{\epsilon_i}\begin{bmatrix}K_i;0 \\ (p+1)m_i\end{bmatrix}_{\epsilon_i} = \sum_{0\leq t\leq s}(-1)^t\epsilon_i^{pm_i(m_i-t)}\begin{bmatrix}pm_i+t-1 \\ t\end{bmatrix}_{\epsilon_i}K_i^t\begin{bmatrix}K_i;0 \\ pm_i\end{bmatrix}_{\epsilon_i}\begin{bmatrix}K_i;0 \\ m_i-t\end{bmatrix}_{\epsilon_i}$$

On utilise l'expression (2.40) pour simplifier les binômes quantiques. Tout d'abord, si $0 < t < m_i$ on voit que $\left[\begin{smallmatrix}pm_i+t-1 \\ t\end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}$ est multiple de $\left[\begin{smallmatrix}t-1 \\ t\end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}$ qui est nul d'après (1.6). Le terme en $t = 0$ se simplifie en $(-1)^{(m_i+1)(p+1)}(\epsilon_i^{m_i})^{(m_i+p)}\left[\begin{smallmatrix}K_i;0 \\ pm_i\end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}\left[\begin{smallmatrix}K_i;0 \\ m_i\end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}$ et celui en $t = m_i$ se simplifie en $(-1)^{m_ip+p+1}(\epsilon_i^{m_i})^{(m_ip+p+1)}K_i^{m_i}p\left[\begin{smallmatrix}K_i;0 \\ pm_i\end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}$. Le facteur du membre de gauche s'écrit quant à lui $(p+1)(\epsilon_i^{m_i})^{m_ip}$. En utlisant (2.35), on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{bmatrix}K_i;0 \\ (p+1)m_i\end{bmatrix}_{\epsilon_i} = \frac{1}{p+1}\epsilon_i^{m_i}\left(\begin{bmatrix}K_i;0 \\ m_i\end{bmatrix}_{\epsilon_i} - \epsilon_i^{m_i}K_i^{m_i}p\right)\begin{bmatrix}K_i;0 \\ pm_i\end{bmatrix}_{\epsilon_i}$$

d'où on déduit l'expression générale (2.43).

Pour (2.47), on commencer par remarquer que 2.26 donne :

$$(X_i^{\pm})^{(pm_i+r)} = \begin{bmatrix}pm_i+r \\ pm_i\end{bmatrix}_{q_i}(X_i^{\pm})^{(pm_i)}(X_i^{\pm})^{(r)}$$

Puis d'après (2.39), on a $\left[\begin{smallmatrix}pm_i+r \\ pm_i\end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i} = (-1)^{(m_i+1)2p}(\epsilon_i^{m_i})^{m_ip(p+1)+p+p(r+1)} = (\epsilon_i^{m_i})^{pr}$. Enfin, on remarque que dans $U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$, on a

$$(X_i^{\pm})^{(pm_i)} = \frac{\left([m_i]_{q_i}!\right)^p}{[pm_i]_{q_i}!}\left((X_i^{\pm})^{(m_i)}\right)^p$$

On a de plus

$$\prod_{k=1}^{p}\begin{bmatrix}km_i \\ (k-1)m_i\end{bmatrix}_{q_i} = \prod_{k=1}^{p}\frac{[km_i]_{q_i}!}{[(k-1)m_i]_{q_i}![m_i]_{q_i}!} = \frac{[pm_i]_{q_i}!}{\left([m_i]_{q_i}!\right)^p}$$

et à d'après (2.39), $\left[\begin{smallmatrix}km_i \\ (k-1)m_i\end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i} = (-1)^{m_i+1}(\epsilon_i^{m_i})^{m_ik+1}k = (\epsilon_i^{m_i})^{(k+1)}k$. D'où on déduit la formule générale (2.46). □

Proposition 2.3.7. *Dans $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$:*

(i) $(X_i^{\pm})^{m_i} = 0$ *pour tout* $1 \leq i \leq n$ *tel que* $m_i > 1$.

(ii) Pour tout $1 \leq i \leq n$, *si* $\epsilon_i^{m_i} = 1$ *alors* $K_i^{m_i}$ *est central.*

(iii) $K_i^{2m_i} = 1$ *pour tout* $1 \leq i \leq n$.

Démonstration. Pour le premier point, on remarque que $(X_i^{\pm})^r = (X_i^{\pm})^{(r)}[r]_{q_i}!$ dans $U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$ et $[r]_{\epsilon_i} = 0$ si r est un multiple de $m_i > 1$. Pour le second point, les $K_i^{m_i}$ commutent avec les $K_j^{\pm}$ donc aussi avec les $\left[\begin{smallmatrix}K_j;0 \\ r\end{smallmatrix}\right]_{q_j}$. On a de plus

$$K_i^{m_i}X_j^{\pm} = (q_i^{m_i})^{a_{ij}}X_j^{\pm}K_i^{m_i}$$

Si $\epsilon_i^{m_i} = 1$, cela montre que les $K_i^{m_i}$ commutent aussi avec les $X_j^{\pm}$ dans U_ϵ^{res} donc avec les $(X_j^{\pm})^{(r)}$. Notons que pour $\epsilon_i^{m_i} = -1$, on prouve de même que $K_i^{2m_i}$ est central, mais cela est impliqué par le dernier point.

Pour ce dernier point, on considère l'égalité

$$\prod_{r=1}^{m_i} \left(K_i q_i^{1-r} - K_i^{-1} q_i^{r-1}\right) = \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ m_i \end{bmatrix}_{q_i} \prod_{r=1}^{m_i} \left(q_i^r - q_i^{-r}\right)$$

Le second membre évalué en ϵ est nul, car son facteur en $r = m_i$ l'est. Le membre de droite s'écrit

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{m_i} \left(K_i q_i^{1-r} - K_i^{-1} q_i^{r-1}\right) &= K_i^{-m_i} q_i^{\sum_{r=1}^{m_i}(1-r)} \prod_{r=1}^{m_i} \left(K_i^2 - q_i^{2(r-1)}\right) \\ &= K_i^{-m_i} q_i^{-\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{r=0}^{m_i-1} \left(K_i^2 - q^{2d_i r}\right)\end{aligned}$$

d'où on déduit en évaluant en ϵ que

$$\prod_{r=0}^{m_i-1} \left(K_i^2 - \epsilon_i^{2r}\right) = 0 \tag{2.48}$$

Comme dans la démonstration du lemme 2.3.5, les puissances en ϵ_i dans (2.48) parcourent tout U_{m_i} quand r parcourt $\{0, ..., m_i - 1\}$. On obtient donc $\left(K_i^2\right)^{m_i} - 1 = 0$ i.e. $K_i^{2m_i} = 1$. $\square$

Chapitre 3

Représentations de dimension finie

Nous allons maintenant nous intéresser aux représentations des algèbres enveloppantes quantifiées U_q et U_ϵ^{res}. On rappelle qu'elles sont définies comme des modules (sur $\mathbb{Q}(q)$ pour la forme rationnelle et sur $\mathcal{A}$ pour les formes intégrales). Dans le cas de la spécialisation restreinte, on supposera en fait qu'il s'agit de modules sur $\mathbb{C}$, ce qui est plus simple à manipuler. La remarque 3.2.1 explique pourquoi cette hypothèse ne pose pas de problème.

3.1 Représentations de la forme rationnelle

Dans cette section, nous décrivons brièvement les représentations irréductibles de la forme rationnelle en suivant le début du chapitre 10 de [CP1994]. Dans le cas classique, de tels modules sont paramétrés par leur plus haut poids et nous avons un résultat similaire pour la forme quantifiée.

Un poids est un n-tuple $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n) \in (\mathbb{Q}(q))^\times$. Si ρ, ρ' sont deux poids on définit un ordre

$$\rho' \leq \rho \Leftrightarrow \exists \beta \in Q^+ \forall i, {\rho_i'}^{-1} \rho_i = q_i^{\beta(\alpha_i^\vee)}$$

On procède alors comme dans le cas classique. Un espace de poids d'un U_q-module est un sous-module non nul de V de la forme

$$V_\rho = \{v \in V | \forall i, K_i \cdot v = \rho_i v\}$$

pour un certain poids ρ. Un U_q-module de plus haut poids ρ est un module engendré par un vecteur v primitif i.e. satisfaisant $v \in V_\rho$ et $X_i^+ v = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors en utilisant la proposition 2.1.9, on obtient la décomposition en somme directe d'espaces de poids :

$$V = \bigoplus_{\rho' \leq \rho} V_{\rho'}$$

avec $\dim V_\rho = 1$. Alors ρ est uniquement déterminé et V est appelé le module de plus haut poids ρ. Les éléments de V_ρ sont appelés vecteurs de plus hauts poids.

On définit le module de Verma $M_q(\rho)$ comme le quotient de U_q par l'idéal à gauche engendré par les X_i^+ et les $K_i - \rho_i 1$. C'est un module de plus haut poids ρ où un vecteur de plus haut poids est l'image de 1 dans le quotient. Tout module de plus haut poids ρ est isomorphe à un quotient de $M_q(\rho)$ et $M_q(\rho)$ possède un unique quotient irréductible $V_q(\rho)$. On a alors les propositions suivantes :

Proposition 3.1.1. *Pour tout poids ρ, il existe un unique U_q-module irréductible de plus haut poids ρ. Il s'agit de $V_q(\rho)$.* $\square$

Proposition 3.1.2. *Un U_q-module irréductible de plus haut poids ρ est intégrable si et seulement si $\rho = \left(\sigma_i q_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)}\right)_{1 \leq i \leq n}$ pour un certain $\sigma \in \{-1, 1\}^n$ et un certain $\lambda \in P^+$.* $\square$

Proposition 3.1.3. *Tout U_q-module irréductible de dimension fini est intégrable et de plus haut poids i.e. isomorphe à un $V_q(\sigma, \lambda) = V_q(\left(\sigma_i q_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)}\right)_{1 \le i \le n})$ pour un certain $\sigma \in \{-1, 1\}^n$ et un certain $\lambda \in P^+$.* □

Proposition 3.1.4. *Tout U_q-module de dimension finie est complètement réductible.* □

Cela permet d'obtenir une classification complète des U_q-modules de dimension finie.

Remarque 3.1.5. Si $\rho' \le \rho = \sigma_i q_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)}$, alors par définition cela signifie que $\forall i, \rho'_i = \sigma_i q_i^{(\lambda-\beta)(\alpha_i^\vee)}$ pour un certain $\beta \in Q^+ \subseteq P^+$. Donc les poids de $V_q(\sigma, \lambda)$ sont de la forme $\left(\sigma_i q_i^{\lambda'(\alpha_i^\vee)}\right)_{1 \le i \le n}$ avec $\lambda' \le \lambda$.

Exemple 3.1.6. On suppose $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ et $\lambda \in \mathbb{N}$. Il existe exactement deux $U_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie $\lambda + 1 \ge 1$. Ceux sont les modules $V_q(\sigma, \lambda)$ pour $\sigma \in \{-1, +1\}$ de base $\{v_0^{(\lambda)}, v_1^{(\lambda)}, ..., v_\lambda^{(\lambda)}\}$ dont l'action sur les générateurs de $U_q(\mathfrak{g})$ est donnée par

$$K_1 v_r^{(\lambda)} = \sigma q^{\lambda - 2r} v_r^{(\lambda)}$$
$$X_1^+ v_r^{(\lambda)} = \sigma[\lambda - r + 1]_q v_{r-1}^{(\lambda)}$$
$$X_1^- v_r^{(\lambda)} = [r+1]_q v_{r+1}^{(\lambda)}$$

où on pose $v_{\lambda+1} = v_{-1} = 0$.

Notons finalement que l'on peut définir le caractère d'un $U_q(\mathfrak{g})$-module de dimension fini en s'inspirant de ce qui existe pour le cas classique des $U(\mathfrak{g})$-modules (cf l'annexe A.2). On a alors :

Proposition 3.1.7. *Le caractère de $V_q(\sigma, \lambda)$ est donné par la formule des caractères de Weyl.*

3.2 Représentations de la spécialisation restreinte

Dans cette section, nous nous intéressons aux représentations de la spécialisation restreinte. Comme indiqué plus haut, nous considérons des modules sur $\mathbb{C}$. Cela est justifié par la remarque suivante :

Remarque 3.2.1. Supposons que V soit une représentation de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$ de dimension finie définie comme un module sur $\mathbb{C}$ (si V est un module sur $\mathcal{A}$ cette structure peut être étendue en une structure $V \otimes \mathbb{C}$ de $\mathbb{C}$-espace vectoriel et l'action de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$ étendue par linéarité). Les K_i agissent comme des opérateurs commutant deux à deux et annulés par le polynôme $X^{2m} - 1$ scindé à racines simples dans $\mathbb{Q}(\epsilon)$ donc les K_i sont simultanément diagonalisables sur $\mathbb{Q}(\epsilon)$. En fait, pour tout $1 \le i \le n$, $K_i^{2m_i} = 1$ donc K_i agit comme un opérateur ayant des valeurs propres dans l'ensemble U_{2m_i}. On a en fait $U_{2m_i} \subseteq \pm U_l \subseteq \mathcal{A}$ d'après (2.38). Comme ϵ est algébrique, $\mathbb{Q}(\epsilon) = \mathbb{Q}[\epsilon]$. Soit $(v_i)_{1 \le i \le \dim V}$ une base de V et $v = \sum_{i=1}^{\dim V} \left(\sum_{j=0}^{l-1} v_{ij} \epsilon^j\right) (v_i \otimes 1) \in V \otimes \mathbb{Q}(\epsilon)$ un vecteur propre commun pour les K_i. On a $v_{ij} \in \mathbb{Q}$ et en multipliant v par un entier bien choisi on peut supposer $v_{ij} \in \mathbb{Z}$, ce qui donne une diagonalisation dans $\mathcal{A}$ de l'action des K_i sur V. De façon similaire, les K_i, $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$ agissent comme des opérateurs commutant deux à deux et la proposition 3.2.2 montre que les valeurs propres de l'action de $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$ sont dans $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{A}$. On peut alors obtenir une réduction dans $\mathcal{A}$.

La proposition 3.2.2 est une généralisation de la proposition 5.1 de [Lus1989] :

Proposition 3.2.2. *Soit V une représentation de dimension finie de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$. Alors*

1. *Les $X_i^\pm$, $(X_i^\pm)^{(m_i)}$ agissent de façon nilpotente sur V*
2. *Les valeurs propres de l'action de $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$ sur V sont entières.*

Démonstration. La nilpotence des $X_i^{\pm}$ est impliquée par celle des $(X_i^{\pm})^{(m_i)}$ si $m_i = 1$ (en effet dans ce cas $X_i^{\pm} = (X_i^{\pm})^{(m_i)}$). Sinon, on sait déjà que les $X_i^{\pm}$ sont nilpotents par la proposition 2.3.7.

On travaille dans la sous-algèbre $\mathfrak{g}_i$ de U_ϵ^{res} engendrée par $K_i^{\pm 1}, X_i^{\pm}, \begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$. K_i commute avec $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$ et $K_i^{m_i} = 1$ donc on peut écrire une décomposition en sous-espaces caractéristiques $V = \bigoplus_{\sigma,k_0,k_1} V_{\sigma,k_0,k_1}$, où sur chaque V_{σ,k_0,k_1}, K_i agit par multiplication par $\sigma\epsilon_i^{k_0}$ et $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - k_1$ agit de façon nilpotente. Par (2.38), on a plus précisément $\sigma \in \{-1, +1\}$ et $k_0 \in \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ et a priori $k_1 \in \mathbb{C}$. On considère enfin un vecteur $v \in V_{\sigma,k_0,k_1}$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a $K_i(X_i^{\pm})^{(r)}v = \epsilon_i^{\pm 2r}(X_i^{\pm})^{(r)}K_i v = \sigma\epsilon_i^{k_0 \pm 2r}(X_i^{\pm})^{(r)}v$. Pour $r = m_i$ on trouve $K_i(X_i^{\pm})^{(m_i)}v = \sigma\epsilon_i^{k_0}(X_i^{\pm})^{(m_i)}v$. Pour $r = 1$ on trouve que $K_i(X_i^{\pm}v) = \sigma\epsilon_i^{k_0 \pm 2}(X_i^{\pm}v)$.

On garde toujours $r \in \mathbb{N}^*$. Les formules (2.19) et (2.20) du lemme 2.2.6 montrent que $\begin{bmatrix} K_i;\pm 2r \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} = \begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} + Y_r^{\pm}$ où $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$ est le terme d'indice $s = 0$ dans les formules du lemme et $Y_r^{\pm}$ la somme des termes d'indices $s > 0$. De plus $Y_r^{\pm}$ appartient à la sous-algèbre engendrée par K_i, K_i^{-1}. Par conséquent x est un vecteur propre de $Y_r^{\pm}$ pour une certaine valeur propre $\lambda_r^{\pm}$ dont (2.19) et (2.20) montrent qu'elle ne ne dépend que de $\sigma\epsilon_i^{k_0}$, m_i, ϵ_i et r. Considérons alors l'action de $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - (k_1 + \lambda_r^{\pm})$ sur $(X_i^{\pm})^{(r)}v$:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - (k_1 + \lambda_r^{\pm})\right)(X_i^{\pm})^{(r)}v &= (X_i^{\pm})^{(r)}\left(\begin{bmatrix} K_i;\pm 2r \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - (k_1 + \lambda_r^{\pm})\right)v \\
&= (X_i^{\pm})^{(r)}\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} + Y_r^{\pm} - (k_1 + \lambda_r^{\pm})\right)v \\
&= (X_i^{\pm})^{(r)}\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - k_1\right)v + (X_i^{\pm})^{(r)}\left(Y_r^{\pm} - \lambda_r^{\pm}\right)v \\
&= (X_i^{\pm})^{(r)}\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - k_1\right)v
\end{aligned}$$

Maintenant, $\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - k_1\right)v \in V_{\sigma,k_0,k_1}$ et on peut donc répéter ce calcul ce qui donne pour tout $p \geq 1$, $\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - (k_1 + \lambda_r^{\pm})\right)^p \left((X_i^{\pm})^{(r)}v\right) = (X_i^{\pm})^{(r)}\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - k_1\right)^p v$ qui est nul pour p assez grand. Ceci montre que $(X_i^{\pm})^{(r)}v$ appartient au sous-espace caractéristique de $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$ correspondant à la valeur propre $k_1 + \lambda_r^{\pm}$.

Décrivons maintenant $\lambda_r^{\pm}$ de façon plus explicite. Les formules (2.19) et (2.20) donnent :

$$Y_r^- = \sum_{1 \leq s \leq m_i} (-1)^s \epsilon_i^{-2rs} \begin{bmatrix} 2r+s-1 \\ s \end{bmatrix}_{\epsilon_i} K_i^s \begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i - s \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$$

$$Y_r^+ = \sum_{1 \leq s \leq m_i} \epsilon_i^{-2rs} \begin{bmatrix} 2r \\ s \end{bmatrix}_{\epsilon_i} K_i^{-s} \begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i - s \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$$

Dans le cas particulier $r = m_i$, (2.40) montre alors que seul le terme en $s = m_i$ est non nul et se simplifie pour donner $\lambda_{m_i}^{\pm} = \pm 2\Delta_i$ avec

$$\Delta_i = (-1)^{(m_i+1)}\sigma^{m_i}(\epsilon_i^{m_i})^{k_0+1} \tag{3.1}$$

On a $\Delta_i \in \{-1, +1\}$ et le signe ne dépend pas de k_1. Comme $\dim V < \infty$, les valeurs propres de $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$ sont dans une partie bornée de $\mathbb{C}$. L'inclusion $(X_i^{\pm})^{(km_i)}.V_{\sigma,k_0,k_1} \subseteq V_{\sigma,k_0,k_1 \pm 2k\Delta_i}$ pour tout $k > 0$ montre alors que $(X_i^{\pm})^{(m_i)}$ agit de façon nilpotente sur V.

Considérons maintenant le cas particulier $r = 1$ et $m_i \geq 2$. On remarque que $\begin{bmatrix} 2r \\ s \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$ vaut $\epsilon_i + \epsilon_i^{-1}$ si $s = 1$, vaut 1 si $s = 2$ et vaut 0 si $s \geq 3$. D'où

$$Y_1^+ = \epsilon_i^{-2}(\epsilon_i+\epsilon_i^{-1})K_i^{-1}\begin{bmatrix}K_i;0\\m_i-1\end{bmatrix}_{\epsilon_i} + \epsilon_i^{-4}K_i^{-2}\begin{bmatrix}K_i;0\\m_i-2\end{bmatrix}_{\epsilon_i}$$

Pour $s=1,2$, $\left[\begin{smallmatrix}K_i;0\\m_i-s\end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}$ agit sur x par multiplication par

$$\prod_{k=1}^{m_i-s}\frac{\sigma\epsilon_i^{k_0+1-k}-\sigma\epsilon_i^{-(k_0+1-k)}}{\epsilon_i^k-\epsilon_i^{-k}} = (-1)^{(s+1)}\Delta_i\sigma^s\epsilon_i^{-s(k_0+1)}\prod_{k=1}^{m_i-s}\frac{1-\epsilon_i^{2(k-1)-2k_0}}{1-\epsilon_i^{2k}} \tag{3.2}$$

Comme on l'a déjà vu dans des démonstrations précédentes, $\epsilon_i^{2(k-1)-2k_0}$ parcourt U_{m_i} quand k parcourt $\{0,1,...,m_i-1\}$ (et de même pour ϵ_i^{2k}). S'il existe $1\leq k\leq m_i-2$ tel que $\epsilon_i^{2(k-1)-2k_0}=1$ alors $\lambda_1^+=0$. Sinon, on a soit $\epsilon_i^{2(0-1)-2k_0}=\epsilon_i^{-2-2k_0}=1$, soit $\epsilon_i^{2((m_i-1)-1)-2k_0}=\epsilon_i^{-4-2k_0}=1$. Dans le premier cas, $\epsilon_i^{2k_0}=\epsilon_i^{-2}$, le grand produit dans l'expression (3.2) vaut 1. On obtient alors

$$\begin{aligned}\lambda_1^+ &= \Delta_i\left(\sigma\epsilon_i^{-1-k_0}\sigma(\epsilon_i^{-2}(\epsilon_i+\epsilon_i^{-1})\epsilon_i^{-k_0})-\sigma^2\epsilon_i^{-2-2k_0}(\epsilon_i^{-4}\sigma^2\epsilon_i^{-2k_0})\right)\\ &= \Delta_i\left((\epsilon_i^{-2}+\epsilon_i^{-4})\epsilon_i^{-2k_0}-\epsilon_i^{-6}\epsilon_i^{-4k_0}\right)\\ &= \Delta_i\left((\epsilon_i^{-2}+\epsilon_i^{-4})\epsilon_i^{2}-\epsilon_i^{-6}\epsilon_i^{4}\right)\\ &= \Delta_i\end{aligned}$$

Dans le second cas, $\epsilon_i^{2k_0}=\epsilon_i^{-4}$. Le produit (3.2) est nul en $s=1$ est nul et en $s=2$ il se simplifie :

$$\prod_{k=1}^{m_i-s}\frac{1-\epsilon_i^{2(k-1)-2k_0}}{1-\epsilon_i^{2k}} = \prod_{k=1}^{m_i-s}\frac{1-\epsilon_i^{2(k+1)}}{1-\epsilon_i^{2k}} = \frac{1-\epsilon_i^{2(1-s)}}{1-\epsilon_i^{2}} = -\epsilon_i^{-2}$$

et on trouve à nouveau

$$\begin{aligned}\lambda_1^+ &= \Delta_i\left(-\sigma^2\epsilon_i^{-2}\epsilon_i^{-2k_0}(-\epsilon_i^{-2})(\epsilon_i^{-4}\sigma^2\epsilon_i^{-2k_0})\right)\\ &= \Delta_i\left(\epsilon_i^{-2}\epsilon_i^{4}\epsilon_i^{-2}\epsilon_i^{-4}\epsilon_i^{4}\right)\\ &= \Delta_i\end{aligned}$$

Il n'existe qu'un nombre fini de triplet $(\sigma,k_0,k_1)\in\{-1,+1\}\times\mathbb{N}\times\mathbb{C}$ tel que $V_{\sigma,k_0,k_1}\neq 0$. Supposons qu'il en existe un tel que $k_1\notin\mathbb{Z}$. On peut supposer de plus que $\Re(k_1)$ est maximal si $\Delta_i=1$ et minimal sinon. En général, $(X_i^+)^{(m_i)}V_{\sigma,k_0,k_1}\subseteq V_{\sigma,k_0,k_1+2\Delta_i k}=0$. Si $m_i=1$, alors (2.46) permet de prouver que pour tout $1\leq k<m_i$, $(X_i^+)^{(k)}V_{\sigma,k_0,k_1}\subseteq V_{\sigma,k_0,k_1+2\Delta_i k}=0$. Supposons maintenant $m_i\geq 2$. Les calculs précédents montrent que

$$\begin{gathered}X_i^+V_{\sigma,k_0,k_1}\subseteq V_{\sigma',k_0',k_1'}\text{ avec}\\ \sigma'\epsilon_i^{k_0'}=\sigma\epsilon_i^{k_0+2}\\ k_1'=\begin{cases}k_1+\Delta_i & \text{si } 2k_0\equiv -2,-4 \mod bm_i\\ k_1 & \text{sinon}\end{cases}\end{gathered} \tag{3.3}$$

Où $b=2$ si l est pair et $b=1$ si l est impair. On définit une suite d'espaces $V_{\sigma_r,k_{0r},k_{1r}}$ en partant de $V_{\sigma_r,k_{00},k_{10}}=V_{\sigma,k_0,k_1}$ et en se déplaçant à chaque étape dans l'espace $V_{\sigma_r,k_{0(r+1)},k_{1(r+1)}}$ contenant $(X_i^+)V_{\sigma,k_{0r},k_{1r}}$ tel que défini par (3.3). Si m_i est impair, alors lorsque r parcourt $\{0,1,...,m_i-1\}$, k_{0r} parcourt toutes les classes modulo m_i. k_{1r} augmente de Δ_i exactement deux fois (en -1 et -2). Si m_i est pair alors $b=2$. Lorsque r parcourt $\{0,1,...,\frac{m_i}{2}-1\}$, k_{0r} parcourt toutes les classes modulo m_i qui ont la même parité que k_{0r}. k_{1r} augmente Δ_i exactement une fois (en -1 si k_{0r} est impair et en -2 si k_{0r} est pair). On considère alors le plus grand r tel que $V_{\sigma_r,k_{0r},k_{1r}}\neq 0$. On a de plus $k_{1r}=k_1\notin\mathbb{Z}$. En outre cela ne peut pas correspondre au dernier élément de la suite car celui-ci est nul (k_{1r} a augmenté de Δ_i au moins une fois) et on peut donc écrire $X_i^+ V_{\sigma_r,k_{0r},k_{1r}} \subseteq V_{\sigma_{r+1},k_{0(r+1)},k_{1(r+1)}} = 0$. Quitte à remplacer (σ, k_0, k_1) par $(\sigma_r, k_{0r}, k_{1r})$, on obtient à nouveau par (2.46) et (2.47) que $(X_i^+)^{(k)}$ annule V_{σ,k_0,k_1} pour tout $k \geq 1$.

Finalement, $(X_i^-)^{(m_i)}$ agit de façon nilpotente sur V_{σ,k_0,k_1} donc il existe $r \geq 1$ tel que $\left((X_i^-)^{(m_i)}\right)^r$, et a fortiori $(X_i^+)^{(rm_i)}(X_i^-)^{(rm_i)}$, annule V_{σ,k_0,k_1}. En appliquant (2.25), on obtient que $\left[\begin{smallmatrix} K_i;0 \\ m_i r \end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}$ annule V_{σ,k_0,k_1}. Mais alors (2.43) montre que l'action de $\left[\begin{smallmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}$ sur V_{σ,k_0,k_1} est annulée par le polynôme $\prod_{s=0}^{p-1}\left(X - \sigma^{m_i}(\epsilon_i^{m_i})^{k_0+1}s\right)$. Comme $\left[\begin{smallmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i} - k_1$ agit de façon nilpotente sur V_{σ,k_0,k_1}, on a nécessairement $k_1 \in \{\sigma^{m_i}(\epsilon_i^{m_i})^{k_0+1}s\}_{s\in\{0,1\ldots p-1\}}$, ce qui contredit $k_1 \notin \mathbb{Z}$. □

Définition 3.2.3. Un poids de U_ϵ^{res} est une suite de triplets $\rho = (\sigma_i, k_{i0}, k_{i1})_{1\leq i\leq n}$ de longueur n tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, $(\sigma_i, k_{i0}, k_{i1}) \in \{-1, +1\} \times \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Soit V est une représentation de dimension finie de U_ϵ^{res}. On note

$$\forall T \in (\mathbb{N}^*)^n, V_\rho^T = \bigcap_{1\leq i\leq n} \operatorname{Ker}\left(K_i - \sigma_i \epsilon_i^{k_{i0}} 1\right) \cap \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - k_{i1} 1\right)^{T_i} \tag{3.4}$$

et

$$V_\rho = \bigcup_{T\in(\mathbb{N}^*)^n} V_\rho^T \tag{3.5}$$

Ce dernier est en réalité un V_ρ^T pour T assez grand. On appelle vecteur de poids ρ les éléments de V_ρ. Alors pour tout $T \in (\mathbb{N}^*)^n$, les V_ρ^T sont en somme directe. De plus on a alors la décomposition $V = \bigoplus_\rho V_\rho$.

Notation 3.2.4. Étant donné $\rho = (\sigma_i, k_{i0}, k_{i1})_{1\leq i\leq n}$ un poids, on conserve la notation

$$\Delta_i = (-1)^{(m_i+1)} \sigma_i^{m_i} (\epsilon_i^{m_i})^{k_{i0}+1} \tag{3.6}$$

Soient maintenant $v \in V_\rho$ et $c \in \mathbb{Z}$. Notons

$$Y_{ic} = \begin{bmatrix} K_i; c \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - (\epsilon_i^{m_i})^c \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} \tag{3.7}$$

D'après (2.19) et (2.20), Y_{ic} est dans la $\mathcal{A}$ sous-algèbre engendrée par K_i, K_i^{-1}. En particulier, v est un vecteur propre de Y_{ic} pour une certaine valeur propre, que l'on notera $\lambda_{\rho ic} \in \mathbb{Q}(\sigma_i \epsilon_i^{k_0}, \epsilon_i)$.

Le calcul direct de $\lambda_{\rho ic}$ à l'aide des formules (2.19) et (2.20) n'est pas forcément évident. Nous utiliserons à la place une approche inductive. On obtient alors le lemme suivant :

Lemme 3.2.5. *Soit $\rho = (\sigma_i, k_{i0}, k_{i1})_{1\leq i\leq n}$ un poids et $v \in V_\rho$. Alors pour tout $c \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda_{\rho,i,\pm c} = (\epsilon_i^{m_i})^c \left\lfloor \frac{k_{i0} \pm c}{m_i} \right\rfloor \Delta_i \tag{3.8}$$

Démonstration. On commence par évaluer (2.19) et (2.20) en $c = pm_i, r = m_i$. Le lemme (2.40) montre que seuls les termes en $s = 0, m_i$ sont non nuls et dans les deux cas, on trouve la formule :

$$\begin{bmatrix} K_i; \pm pm_i \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} v = (\epsilon_i^{m_i})^{pm_i} \left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} \pm p\Delta_i\right) v \tag{3.9}$$

Si $m_i = 1$ on a terminé. Supposons donc $m_i \geq 2$ et considérons un $c \in \mathbb{Z}$. On évalue (2.18) en ϵ et $r = m_i$:

$$\begin{bmatrix} K_i; c+1 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} = \epsilon_i^{m_i} \left(\begin{bmatrix} K_i; c \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} + \epsilon_i^{c+1} K_i \begin{bmatrix} K_i; c \\ m_i - 1 \end{bmatrix}_{\epsilon_i} \right) \tag{3.10}$$

On applique alors chaque membre à v :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} K_i; c+1 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} v &= \epsilon_i^{m_i} \left(\begin{bmatrix} K_i; c \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} + \epsilon_i^{c+1} K_i \begin{bmatrix} K_i; c \\ m_i - 1 \end{bmatrix}_{\epsilon_i} \right) v \\
&= \epsilon_i^{m_i} \left(\begin{bmatrix} K_i; c \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} + \epsilon_i^{c+1} \sigma_i \epsilon_i^{k_{i0}} \prod_{k=1}^{m_i-1} \frac{\sigma_i \epsilon_i^{k_{i0}} \epsilon_i^{c+1-k} - \sigma_i \epsilon_i^{-k_{i0}} \epsilon_i^{-(c+1-k)}}{\epsilon_i^k - \epsilon_i^{-k}} \right) v \\
&= \epsilon_i^{m_i} \left(\begin{bmatrix} K_i; c \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} + \epsilon_i^{c+1} \sigma_i \epsilon_i^{k_{i0}} \prod_{k=1}^{m_i-1} \frac{\sigma_i \epsilon_i^{k_{i0}} \epsilon_i^{c+1-k} \left(1 - \epsilon_i^{-2k_{i0}} \epsilon_i^{-2(c+1-k)}\right)}{-\epsilon_i^{-k}(1 - \epsilon_i^{2k})} \right) v \\
&= \epsilon_i^{m_i} \left(\begin{bmatrix} K_i; c \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} + (-1)^{m_i+1} (\epsilon_i^{m_i})^{c+1} \sigma_i^{m_i} (\epsilon_i^{m_i})^{k_{i0}} \prod_{k=1}^{m_i-1} \frac{1 - \epsilon_i^{-2k_{i0}} \epsilon_i^{-2(c+1-k)}}{1 - \epsilon_i^{2k}} \right) v \\
&= \epsilon_i^{m_i} \left(\begin{bmatrix} K_i; c \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} + \Delta_i (\epsilon_i^{m_i})^c \prod_{k=1}^{m_i-1} \frac{1 - \epsilon_i^{-2(k_{i0}+c+1-k)}}{1 - \epsilon_i^{2k}} \right) v
\end{aligned}$$

Intéressons nous au grand produit. Une nouvelle fois, lorsque k parcourt $\{0, ...m_i - 1\}$, les puissances en ϵ_i parcourt U_{m_i}. Si $\epsilon_i^{-2(k_{i0}+c+1-k)} = 1$ pour un certain $k \in \{1, ..., m_i - 1\}$ alors le produit est nul. Sinon, $\epsilon_i^{-2(k_{i0}+c+1)} = 1$ et le grand produit vaut alors 1. Notons que ce dernier cas arrive si et seulement si $k_{i0} \equiv -(c+1) \mod m_i$, d'où

$$\begin{bmatrix} K_i; c+1 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} v = \epsilon_i^{m_i} \left(\begin{bmatrix} K_i; c \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} + \Delta_i (\epsilon_i^{m_i})^c \delta_{k_{i,0}, -(c+1)} \right) v \tag{3.11}$$

Considérons enfin $0 \leq r < m_i$. A partir de relation de récurrence (3.11) et en séparant les cas $\pm$, on trouve aisément

$$\begin{bmatrix} K_i; \pm(pm_i + r) \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} v = \left((\epsilon_i^{m_i})^r \begin{bmatrix} K_i; \pm pm_i \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} \pm (\epsilon_i^{m_i})^{pm_i+r} \chi_{i,\pm r}(k_{i0}) \Delta_i \right) v$$

où $\chi_{i,+r}(k_0) = 1$ si $m_i - r \leq k_{i0} \leq m_i - 1$, $\chi_{i,-r}(k_0) = 1$ si $0 \leq k_{i0} \leq r - 1$ et $\chi_{i,\pm r}(k_0) = 0$ sinon. En injectant l'expression (3.9) on trouve

$$\lambda_{\rho,i,\pm(pm_i+r)} = \pm (\epsilon_i^{m_i})^{pm_i+r} \left(p + \chi_{i,\pm r}(k_{i0})\right) \Delta_i \tag{3.12}$$

Finalement, si $c \in \mathbb{N}$ et si on pose $c = pm_i + r$ sa division euclidienne par m_i, on a

$$\pm \left(p + \chi_{i,\pm r}(k_{i0})\right) = \left\lfloor \frac{k_{i0} \pm c}{m_i} \right\rfloor$$

d'où on déduit la formule générale. $\square$

Proposition 3.2.6. *Soient $T \in (\mathbb{N}^*)^n$, $\rho = (\sigma_i, k_{i0}, k_{i1})_{1 \leq i \leq n}$ un poids et $v \in V_\rho^T$. Considérons $r \in \{1, m_i\}$ et $j \in \{1, 2, ..., n\}$ et supposons que $(X_j^\pm)^{(r)} v \neq 0$. Alors il existe un (unique) poids $\rho_r = (\sigma_{ir}, k_{i0r}, k_{i1r})_{1 \leq i \leq n}$ tel que $(X_j^\pm)^{(r)} v \in V_{\rho_r}^T$. En particulier, $\bigoplus_\rho V_\rho^T$ est un sous-module de V et si V est irréductible $V = \bigoplus_\rho V_\rho^1 = \bigoplus_\rho V_\rho$. De plus pour tout $1 \leq i \leq n$,*

$$\begin{aligned}
\sigma_{ir} &= (\epsilon_i^{m_i})^{\lfloor (k_{i0} \pm r a_{ij})/m_i \rfloor} \sigma_i \\
k_{i0r} &= k_{i0} \pm r a_{ij} - \left\lfloor \frac{k_{i0} \pm r a_{ij}}{m_i} \right\rfloor m_i \\
k_{i1r} &= (\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} \left(k_{i1} + \left\lfloor \frac{k_{i0} \pm r a_{ij}}{m_i} \right\rfloor \Delta_i \right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Démonstration. On a $K_i((X_j^{\pm})^{(r)} v) = \epsilon_i^{\pm r a_{ij}} (X_j^{\pm})^{(r)} K_i v = \sigma_i \epsilon_i^{k_{i0} \pm a_{ij}} (X_j^{\pm} v)$. Notons $a = \lfloor (k_{i0} \pm r a_{ij}) / m_i \rfloor$ et $b = k_{i0} \pm a_{ij} - a m_i$ le quotient et reste de la division euclidienne de $k_{i0} \pm a_{ij}$ par m_i. Alors on obtient $K_i(X_j^{\pm} v) = \sigma_i (\epsilon_i^{m_i})^a \epsilon_i^b (X_j^{\pm} v)$. De plus,

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - \left((\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} k_{i1} + \lambda_{\rho,i,\pm r a_{ij}} \right) \right) ((X_j^{\pm})^{(r)} v) = (X_j^{\pm})^{(r)} \left(\begin{bmatrix} K_i; \pm r a_{ij} \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - \left((\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} k_{i1} + \lambda_{\rho,i,\pm r a_{ij}} \right) \right) v \\
&= (X_j^{\pm})^{(r)} \left(\left((\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} + Y_{\rho,i,\pm r a_{ij}} \right) - \left((\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} k_{i1} + \lambda_{\rho,i,\pm r a_{ij}} \right) \right) v \\
&= (X_j^{\pm})^{(r)} (\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} \left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - k_{i1} \right) v + (X_j^{\pm})^{(r)} \left(Y_{\rho,i,\pm r a_{ij}} - \lambda_{\rho,i,\pm r a_{ij}} \right) v \\
&= (X_j^{\pm})^{(r)} (\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} \left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - k_{i1} \right) v
\end{aligned}$$

On a alors $(\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} \left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - k_{i1} \right) v \in V_\rho^T$ et on peut répéter le calcul ci-dessus. On trouve,

$$\left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - \left((\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} k_{i1} + \lambda_{\rho,i,\pm r a_{ij}} \right) \right)^{T_i} ((X_j^{\pm})^{(r)} v) = (X_j^{\pm})^{(r)} (\epsilon_i^{m_i})^{T_i r a_{ij}} \left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - k_{i1} \right)^{T_i} v = 0$$

On utilise enfin le lemme 3.2.5 :

$$\begin{aligned}
k_{i1r} &= (\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} k_{i1} + \lambda_{\rho,i,\pm r a_{ij}} \\
&= (\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} k_{i1} + (\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} \left\lfloor \frac{k_{i0} \pm r a_{ij}}{m_i} \right\rfloor \Delta_i \\
&= (\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} \left(k_{i1} + \left\lfloor \frac{k_{i0} \pm r a_{ij}}{m_i} \right\rfloor \Delta_i \right)
\end{aligned}$$

□

La proposition 3.2.6 montre en particulier que si $\forall i, \epsilon_i^{m_i} = 1$ alors σ est invariant par l'action de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$. En réalité, l'annexe A.1 montre que $\forall i, \epsilon_i^{m_i} = 1$ est équivalent à l impair (en effet, on peut toujours trouver i tel que $d_i \neq 2$ donc si l est pair, on a $\epsilon_i^{m_i} = -1$). Cela suggère la réduction suivante :

Remarque 3.2.7. Supposons l impair et en particulier que les m_i sont impairs. Pour tout $s = (s_1, s_2, ..., s_n) \in \{1, -1\}^n$, considérons le sous-espace $Z_s = \{v \in V | \forall i, K_i^{m_i} v = s_i v\}$. Si $v \in Z_s$, on a $K_i^{m_i}(X_j^{\pm} v) = (\epsilon_i^{m_i})^{\pm a_{ij}} s_i^{m_i} (X_j^{\pm} v) = s_i (X_j^{\pm} v)$. Donc Z_s est un sous module de V. D'après le lemme 2.3.7, on a une décomposition en somme directe de sous-modules $V = \bigoplus_s Z_s$. Appelons représentation de type s celles pour lesquelles $V = Z_s$. Notons que pour une telle représentation, alors pour tous poids ρ et $0 \neq v \in V_\rho$, $\forall i, K_i^{m_i} v = \sigma_i^{m_i} (\epsilon_i^{m_i})^{k_0} v = \sigma_i v = s_i v$ d'où $\sigma = s$. On a un automorphisme d'algèbre de U_q donné par $X_i^+ \mapsto s_i X_i^+$, $X_i^- \mapsto X_i^-$ et $K_i \mapsto s_i K_i$ pour tout i qui induit un automorphisme d'algèbre ϕ_s de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$. Si V est de type s', alors pour tout $v \in V$, $\phi_s(K_i^{m_i}) v = s_i^{m_i} K_i^{m_i} v = s_i s_i' v$. Par conséquent ϕ_s échange les représentations de type s avec celles de type $1 = (1, 1, ..., 1)$. Cela permet de réduire l'étude des représentations de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$ à celles de type 1.

La proposition 3.2.6 laisse penser que l'on peut regrouper les paramètres k_{i0}, k_{i1} en un seul paramètre $k_i = k_{i0} + m_i k_{i1}$. Le lemme 3.2.8 fournit les expressions de $k_{i0}, \epsilon_i^{k_0}$ et k_{i1} en fonction de k, qui seront utilisées dans proposition 3.3.1 de la section suivante. Dans la littérature, il est d'usage d'exprimer ces paramètres en fonction de $\left[\begin{smallmatrix} k_i \\ m_i \end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}$ mais nous utiliserons aussi $\left\lfloor \frac{k}{m_i} \right\rfloor$ qui est parfois plus pratique à manipuler.

Lemme 3.2.8. *Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $k = m_i k_1 + k_0$ sa division euclidienne par m_i. Alors*

$$k_0 = k - \left\lfloor \frac{k}{m_i} \right\rfloor m_i \tag{3.14}$$

$$\epsilon_i^{k_0} = (\epsilon_i^{m_i})^{\left\lfloor \frac{k}{m_i} \right\rfloor} \epsilon_i^k = (\epsilon_i^{m_i})^{\left[\begin{smallmatrix} k \\ m_i \end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}} \epsilon_i^k \tag{3.15}$$

$$k_1 = \left\lfloor \frac{k}{m_i} \right\rfloor = (-1)^{m_i+1} (\epsilon_i^{m_i})^{k+1} \begin{bmatrix} k \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} \tag{3.16}$$

Démonstration. Tout d'abord, $k_0 = k - \left\lfloor \frac{k}{m_i} \right\rfloor m_i$ et $k_1 = \left\lfloor \frac{k}{m_i} \right\rfloor$ sont évidents. Ensuite, $\epsilon_i^k = (\epsilon_i^{m_i})^{k_1} \epsilon_i^{k_0}$ donc (3.15) découle de (3.16). Maintenant si $k_1 = 0$, alors $\left[\begin{smallmatrix} k \\ m_i \end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i} = \left[\begin{smallmatrix} k_0 \\ m_i \end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i} = 0 = k_1$. Si $k_1 > 0$, on peut appliquer (2.39) et on obtient alors $\left[\begin{smallmatrix} k \\ m_i \end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i} = (-1)^{(m_i+1)(k_1+1)} (\epsilon_i^{m_i})^{k_1+k_0+1} k_1$. Si $k_1 < 0$, (1.9) s'écrit $\left[\begin{smallmatrix} k \\ m_i \end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i} = (-1)^{m_i} \left[\begin{smallmatrix} -k_1 m_i + (m_i - 1 - k_0) \\ m_i \end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}$ ce qui permet à nouveau d'appliquer (2.39). Après simplification, on trouve la même formule que dans le cas $k_1 > 0$.

Considérons plus attendivement $(-1)^{(m_i+1)(k_1+1)} (\epsilon_i^{m_i})^{k_1+k_0+1}$. Si $\epsilon_i^{m_i} = 1$, il vaut $(-1)^{(m_i+1)(k_1+1)}$. Si $\epsilon_i^{m_i} = -1$ on trouve $(-1)^{(m_i+1)(k_1+1)+k_1+k_0+1} = (-1)^{k+m_i}$. On peut donc l'exprimer de façon générale

$$\begin{aligned}
(-\epsilon_i^{m_i})^{(m_i+1)(k_1+1)} (\epsilon_i^{m_i})^{k+m_i} &= (-1)^{(m_i+1)(k_1+1)} (\epsilon_i^{m_i})^{m_i k_1 + m_i + k_1 + 1 + k + m_i} \\
&= (-1)^{(m_i+1)(k_1+1+k_1)} (\epsilon_i^{m_i})^{k_1 + m_i + k_1 + 1 + k + m_i} \\
&= (-1)^{m_i+1} (\epsilon_i^{m_i})^{k+1}
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. □

3.3 Représentations irréductibles de la spécialisation restreinte

Dans cette section, nous allons reformuler les paramètres des représentations de la spécialisation restreinte, de façon à pouvoir classifier celles qui sont irréductibles comme des représentations de plus haut poids.

Nous avons aussi vu l'importance du paramètre Δ_i qui intuitivement donne la direction dans laquelle va évoluer k_{i1}. Pour conserver le fait que l'action de $X_i^+, (X_i^+)^{(m_i)}$ augmente k_{i1} et que celle de $X_i^-, (X_i^-)^{(m_i)}$ le diminue, il est naturel de considérer à la place le paramètre $\Delta_i k_{i1}$. De même, on a vu que l'action de U_ϵ^{res} modifie le paramère σ_i en le multipliant par une puissance de $\epsilon_i^{m_i}$. Il est donc judicieux de modifier légèrement la définition de ces coefficients en les multipliant par une puissance de $\epsilon_i^{m_i}$ bien choisie, de façon à ce que le paramètre σ devienne invariant par l'action de U_ϵ^{res}. la définition 3.3.1 et la proposition 3.3.2 expriment ainsi le sous-espace $V^T_{(\tau_i, k_{i0}, k_{i1})_{1 \le i \le n}}$ en fonction de $\sigma = ((\epsilon_i^{m_i})^{\lfloor k_i / m_i \rfloor} \tau_i)_{1 \le i \le n}$ et de $\lambda = \sum_{i=1}^n (\Delta_i k_{i1} + k_{i0}) \omega_i \in P$. Les changements de signes sont répercutés dans la définition de $V^T_{\sigma,\lambda}$.

Définition 3.3.1. Soit V un U_ϵ^{res}-module de dimension finie, $\sigma \in \{-1, 1\}^n$, $\lambda \in P$ et $T \in (\mathbb{N}^*)^n$. On pose

$$\begin{aligned}
V^T_{\sigma,\lambda} &= \bigcap_{1 \le i \le n} \operatorname{Ker}\left(K_i - \sigma_i \epsilon_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)} 1\right) \cap \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - \sigma_i^{m_i} \begin{bmatrix} \lambda(\alpha_i^\vee) \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} 1\right)^{T_i} \\
&= \bigcap_{1 \le i \le n} \operatorname{Ker}\left(K_i - \sigma_i \epsilon_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)} 1\right) \cap \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} - \Delta_i(\lambda) \left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i} \right\rfloor 1\right)^{T_i}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

où $\forall i, \Delta_i(\lambda) = (-1)^{m_i+1}\sigma_i^{m_i}(\epsilon_i^{m_i})^{\lambda(\alpha_i^\vee)+1}$. On définit l'espace de poids

$$V_{\sigma,\lambda} = \bigcup_{T\in(\mathbb{N}^*)^n} V_{\sigma,\lambda}^T \tag{3.18}$$

Proposition 3.3.2. *Pour tout poids $\rho = (\tau_i, k_{i0}, k_{i1})_{1\leq i\leq n}$, posons $\sigma = ((\epsilon_i^{m_i})^{\lfloor \lambda(\alpha_i^\vee)/m_i \rfloor}\tau_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\lambda = \sum_{i=1}^n (m_i\Delta_i k_{i1} + k_{i0})\omega_i \in P$. Alors $V_{\sigma,\lambda}^T = V_\rho^T$ et $V_{\sigma,\lambda} = V_\rho$. De plus les espaces de poids $V_{\sigma,\lambda}^T$ sont en somme directe et $V = \bigoplus_{\sigma,\lambda} V_{\sigma,\lambda}$.*

Démonstration. On se donne un poids $\rho = (\tau_i, k_{i0}, k_{i1})_{1\leq i\leq n}$ et on pose $\lambda = \sum_{i=1}^n (m_i\Delta_i k_{i1} + k_{i0})\omega_i$ comme dans l'énoncé. Alors par définition $\lambda(\alpha_i^\vee) = m_i\Delta_i k_{i1} + k_{i0}$ est la division euclidienne de $\lambda(\alpha_i^\vee)$ par m_i. On utilise le lemme 3.2.8 : On a bien $\Delta_i(\lambda)\left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i}\right\rfloor 1 = \sigma_i^{m_i}\begin{bmatrix}\lambda(\alpha_i^\vee)\\ m_i\end{bmatrix}_{\epsilon_i} 1$, $\sigma_i\epsilon_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)} = \tau_i(\epsilon_i^{m_i})^{\left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i}\right\rfloor}\epsilon_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)} = \tau_i\epsilon_i{}^{k_{i0}}$ et

$$\begin{aligned}
\Delta_i &= (-1)^{m_i+1}\tau_i^{m_i}(\epsilon_i^{m_i})^{k_{i0}+1}\\
&= (-1)^{m_i+1}\sigma_i^{m_i}(\epsilon_i^{m_i})^{\left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i}\right\rfloor m_i}(\epsilon_i^{m_i})^{k_{i0}+1}\\
&= (-1)^{m_i+1}\sigma_i^{m_i}(\epsilon_i^{m_i})^{\lambda(\alpha_i^\vee)+1}\\
&= \Delta(\lambda)
\end{aligned}$$

d'où on déduit $\Delta_i(\lambda)\left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i}\right\rfloor = \Delta_i\left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i}\right\rfloor = \Delta_i\left\lfloor \frac{m_i\Delta_i k_{i1}+k_{i0}}{m_i}\right\rfloor = \Delta_i\Delta_i k_{i1} = k_{i1}$. Par conséquent $V_{\sigma\lambda}^T = V_\rho^T$. D'où $V_{\sigma\lambda} = V_\rho$.

Étant donné (σ,λ), on définit $\rho = (\tau_i, k_{i0}, k_{i1})_{1\leq i\leq n}$ où k_{i1}, k_{i0} sont donnés par les divisions euclidiennes $\lambda(\alpha_i^\vee) = m_i\Delta_i k_{i1} + k_{i0}$ et $\tau_i = (\epsilon_i^{m_i})^{\lfloor \lambda(\alpha_i^\vee)/m_i\rfloor}\sigma_i$. On définit de même ρ' à partir de (σ',λ'). Si il existe $v \in V_{\sigma,\lambda}^T \cap V_{\sigma',\lambda'}^T$ tel que $v \neq 0$, alors a fortiori $v \in V_\rho \cap V_{\rho'}$ et donc $V_\rho = V_{\rho'}$. Par conséquent $\rho = \rho'$ i.e. $\tau = \tau'$ et $\forall i, k_{i1} = k'_{i1} \wedge k_{i0} = k'_{i0}$. On en déduit $(\sigma,\lambda) = (\sigma',\lambda')$. □

Proposition 3.3.3. *Soit V un U_ϵ^{res}-module de dimension finie.*

1. *Soient $\lambda \in P$ et $T \in (\mathbb{N}^*)^n$. Alors pour tout $1 \leq j \leq n$ on a :*

$$X_j^\pm V_{\sigma\lambda}^T \subseteq V_{\sigma,\lambda\pm\alpha_j}^T \tag{3.19}$$

$$(X_j^\pm)^{(m_j)} V_{\sigma\lambda}^T \subseteq V_{\sigma,\lambda\pm m_j\alpha_j}^T \tag{3.20}$$

2. *Pour tout $\sigma \in \{-1,1\}^n$, $\bigoplus_\lambda V_\lambda^T$ est un sous-module de V. Si V est irréductible $V = \bigoplus_\lambda V_{\sigma,\lambda}^1 = \bigoplus_\lambda V_{\sigma,\lambda}$ pour un certain $\sigma \in \{-1,1\}^n$.*

Démonstration. Le second point se déduit facilement du premier et de la définition des $V_{\sigma\lambda}^T$. Rappelons ensuite que α_j est donné par (1.12). Soient $r \in \{1, m_j\}$, $v \in V_{\sigma\lambda}^T$ et supposons que $(X_j^\pm)^{(r)}v \neq 0$. Soit alors V_{σ_r,λ_r}^T l'espace de poids auquel $(X_j^\pm)^{(r)}v$ appartient. Soit $1 \leq i \leq n$. Dans ce contexte, les formules de la proposition 3.2.6 s'écrivent

$$\begin{aligned}
\tau_{ir} &= (\epsilon_i^{m_i})^{\lfloor (k_{i0}\pm ra_{ij})/m_i\rfloor}\tau_i\\
&= (\epsilon_i^{m_i})^{\Delta_i k_{i1}}(\epsilon_i^{m_i})^{\Delta_i k_{i1}+\lfloor (k_{i0}\pm ra_{ij})/m_i\rfloor}\tau_i\\
&= (\epsilon_i^{m_i})^{\Delta_i k_{i1}}(\epsilon_i^{m_i})^{\lfloor (m_i\Delta_i k_{i1}+k_{i0}\pm ra_{ij})/m_i\rfloor}\tau_i\\
&= (\epsilon_i^{m_i})^{\left(\left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{(\lambda\pm r\alpha_j)(\alpha_i^\vee)}{m_i}\right\rfloor\right)}\tau_i\\
&\Rightarrow \sigma_{ir} = \sigma_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_{i0r} &= k_{i0} \pm r a_{ij} - \left\lfloor \frac{k_{i0} \pm r a_{ij}}{m_i} \right\rfloor m_i \\
&= \Delta_i k_{i1} m_i + k_{i0} \pm r a_{ij} - \left\lfloor \frac{\Delta_i k_{i1} m_i + k_{i0} \pm r a_{ij}}{m_i} \right\rfloor m_i \\
&= (\lambda \pm r\alpha_j)(\alpha_i^\vee) - \left\lfloor \frac{(\lambda \pm r\alpha_j)(\alpha_i^\vee)}{m_i} \right\rfloor m_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{ir} &= (-1)^{(m_i+1)} \tau_{ir}^{m_i} (\epsilon_i^{m_i})^{k_{i0r}+1} \\
&= (-1)^{(m_i+1)} \left((\epsilon_i^{m_i})^{\lfloor (k_{i0} \pm r a_{ij})/m_i \rfloor m_i} \tau_i^{m_i} \right) \left((\epsilon_i^{m_i})^{k_{i0} \pm r a_{ij} - \lfloor (k_{i0} \pm r a_{ij})/m_i \rfloor m_i + 1} \right) \\
&= \Delta_i (\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{ir} k_{i1r} &= \Delta_{ir} (\epsilon_i^{m_i})^{r a_{ij}} \left(k_{i1} + \left\lfloor \frac{k_{i0} \pm r a_{ij}}{m_i} \right\rfloor \Delta_i \right) \\
&= \Delta_i k_{i1} + \left\lfloor \frac{k_{i0} \pm r a_{ij}}{m_i} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{m_i \Delta_i k_{i1} + k_{i0} \pm r a_{ij}}{m_i} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{(\lambda \pm r\alpha_j)(\alpha_i^\vee)}{m_i} \right\rfloor
\end{aligned}
$$

Cela achève la démonstration. □

Un module V est dit de type $\sigma \in \{-1,1\}^n$ si $V = \bigoplus_\lambda V_{\sigma,\lambda}$. En particulier, tout module irréductible possède un type bien défini. Si l est impair, alors cette définition coïncide avec la notion définie dans la remarque 3.2.7. L'automorphisme ϕ_σ mentionnée dans cette remarque permet de réduire l'étude aux modules de plus haut poids de type 1. Dans la suite, on s'intéressera surtout aux modules de type 1 et on écrira alors simplement $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda)$ pour $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(1,\lambda)$ et $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda)_{\lambda'}$ pour $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(1,\lambda)_{1,\lambda'}$. De même pour $W_\epsilon^{\mathrm{res}}$.

On peut alors de nouveau procéder comme dans le cas classique. Un $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module de plus haut poids $\lambda \in P$ de type $\sigma \in \{-1,1\}^n$ est un module engendré par un vecteur $v_{\sigma,\lambda}$ primitif i.e. satisfaisant $v_{\sigma,\lambda} \in V_{\sigma,\lambda}$ et $X_i^+ v_{\sigma,\lambda} = (X_i^+)^{(m_i)} v_{\sigma,\lambda} = 0$ pour tout $1 \le i \le n$. On obtient la décomposition en somme directe d'espaces de poids :

$$
V = \bigoplus_{\lambda' \le \lambda} V_{\sigma,\lambda'} \tag{3.21}
$$

avec $\dim V_{(\sigma,\lambda)} = 1$. Alors λ est uniquement déterminé. Les éléments de $V_{\sigma,\lambda}$ sont appelés vecteurs de plus hauts poids. De plus, V possède un unique quotient irréductible. Cela conduit a la définition suivante :

Définition 3.3.4. Soit $V_q(\sigma,\lambda)$ l'unique U_q-module irréductible de plus haut poids $\left(\sigma_i q_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)}\right)_{1\le i\le n}$ pour un certain $\sigma \in \{-1,1\}^n$ et un certain $\lambda \in P^+$. Soit v_λ un vecteur de plus haut poids. On définit $V_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda)$ le sous $U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$-module de $V_q(\sigma,\lambda)$ engendré par v_λ et on définit le module de Weyl

$$
W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda) = V_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda) \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}
$$

via le morphisme $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ qui à q associe ϵ. C'est un module de dimension finie de plus haut poids λ et de type σ. On note alors $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda)$ son unique quotient irréductible. Par un argument classique c'est, à isomorphisme près, l'unique module irréductible de plus haut poids λ et de type σ.

Remarque 3.3.5. Soit $v \in V_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda)_{\rho'} \subseteq V_q(\sigma,\lambda)_{\rho'}$ où $\rho' = \left(\sigma_i q_i^{\lambda'(\alpha_i^\vee)}\right)_{1\le i\le n}$ pour $\lambda' \le \lambda$ (cf la remarque 3.1.5). Alors par définition, on a $K_i v = \sigma_i q_i^{\lambda'(\alpha_i^\vee)} v$. Par (2.13) et (1.3), on en déduit aisément que $\left[{K_i;0 \atop m_i}\right]_{q_i} v =$

$\sigma_i^{m_i} \left[{\lambda'(\alpha_i^\vee) \atop m_i} \right]_{q_i} v$. Ceci montre que $v \otimes 1 \in W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda)_{\sigma,\lambda'}$ et les espaces de poids "coïncident". Cela justifie d'une autre manière les changements de signes opérés dans la définition 3.3.1 et la proposition 3.3.2.

L'exemple qui suit est tiré de [CP1994] :

Exemple 3.3.6. On suppose $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ et $\lambda \in \mathbb{N}$. Alors à partir de (3.3.6), on trouve une base $\{v_0^{(\lambda)}, v_1^{(\lambda)}, ..., v_\lambda^{(\lambda)}\}$ de $W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda)$ sur laquelle l'action de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$ est donnée par :

$$K_1 v_r^{(\lambda)} = \epsilon^{\lambda - 2r} v_r^{(\lambda)}$$

$$\begin{bmatrix} K_1; 0 \\ m \end{bmatrix}_\epsilon v_r^{(\lambda)} = (-1)^{(m+1)} (\epsilon^m)^{\lambda - 2r + 1} \left\lfloor \frac{\lambda - 2r}{m} \right\rfloor v_r^{(\lambda)}$$

$$X_1^+ v_r^{(\lambda)} = [\lambda - r + 1]_\epsilon v_{r-1}^{(\lambda)}$$

$$X_1^- v_r^{(\lambda)} = [r + 1]_\epsilon v_{r+1}^{(\lambda)}$$

$$(X_1^+)^{(m)} v_r^{(\lambda)} = \begin{bmatrix} \lambda - r + m \\ m \end{bmatrix}_\epsilon v_{r-m}^{(\lambda)} = (\epsilon^m)^{\lambda - r} \left(\left\lfloor \frac{\lambda - r}{m} \right\rfloor + 1 \right) v_{r-m}^{(\lambda)}$$

$$(X_1^-)^{(m)} v_r^{(\lambda)} = \begin{bmatrix} r + m \\ m \end{bmatrix}_\epsilon v_{r+m}^{(\lambda)} = (\epsilon^m)^r \left(\left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor + 1 \right) v_{r+m}^{(\lambda)}$$

où pour $r \notin \{0, 1, ..., \lambda\}$, on pose $v_r = 0$. Si V' est le sous-espace de $W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda)$ engendré par les vecteurs $v_r^{(\lambda)}$ qui satisfont $\lambda_0 < r_0 < m_i$ et $r_1 < \lambda_1$ (où comme d'habitude $\lambda = m_i \lambda_1 + \lambda_0$ et $r = m_i r_1 + r_0$ sont les divisions euclidiennes par m_i) alors V' est un sous-module de $W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda)$ et

$$V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda) = W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda)/V'$$

Le théorème suivant généralise la proposition 6.4 de [Lus1989] :

Theorème 3.3.7. *Tout $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module irréductible de dimension finie est isomorphe à $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda)$ pour un certain $(\sigma, \lambda) \in \{-1, +1\}^n \times P^+$.*

Démonstration. Soit V un tel module et σ son type. Par la proposition 3.3.3, $V = \bigoplus_\lambda V_{\sigma,\lambda}^1 = \bigoplus_\lambda V_{\sigma,\lambda}$. Soit λ maximal parmi les poids de V. Alors tout vecteur non nul $v_{\sigma,\lambda} \in V_{\sigma,\lambda}$ est primitif. Comme de plus V est irréductible, $v_{\sigma,\lambda}$ engendre V et $V \cong V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda)$.

Il reste à montrer que $\lambda \in P^+$. Par le premier point du lemme 3.2.2 et par (2.46), il existe un $p > 0$ tel que

$$(X_i^-)^{((p-1)m_i)} v_{\sigma,\lambda} \neq 0$$

$$(X_i^-)^{(pm_i)} v_{\sigma,\lambda} = 0$$

On a alors $(X_i^+)^{(m_i)} (X_i^-)^{(pm_i)} v_{\sigma,\lambda} = 0$. On utilise ensuite la relation (2.25). Seul le terme en $t = m_i$ est non nul et on trouve

$$(X_i^+)^{((p-1)m_i)} \begin{bmatrix} K_i; -(p-1)m_i \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} v_{\sigma,\lambda} = 0$$

On utilise alors (3.9), pour déduire

$$(X_i^+)^{((p-1)m_i)} \begin{bmatrix} K_i; -(p-1)m_i \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} v_{\sigma,\lambda} = (\epsilon_i^{m_i})^{(p-1)m_i} \Delta_i(\lambda) \left(\left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i} \right\rfloor - (p-1) \right) (X_i^+)^{((p-1)m_i)} v_{\sigma,\lambda}$$

d'où

$$\left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i} \right\rfloor = p - 1$$

i.e.

$$(p-1)m_i \leq \lambda(\alpha_i^\vee) < pm_i \tag{3.22}$$

En particulier, $\lambda(\alpha_i^\vee) \geq 0$. $\square$

Concluons cette section en observant que l'on a malheureusement pas l'équivalent de la proposition 3.1.3 pour la représentation restreinte. Conservons les notations de l'exemple 3.3.6 et supposons de plus $l = 2m = 4$ et $\lambda = 2$. Alors on voit facilement que pour tout $v = \sum_{i=0}^{2} a_i v_i^{(2)} \in W_\epsilon^{\mathrm{res}}(2)$ on a $(X_1^+)^{(2)} v = a_2 v_0^{(2)}$, $(X_1^-)^{(2)} v = a_0 v_2^{(2)}$. De plus par (2.32), $X_1^+ v = a_2 [1]_\epsilon v_1^{(2)} = a_2 v_1^{(2)}$ et $X_1^- v = a_0 [1]_\epsilon v_1^{(2)} = a_0 v_1^{(2)}$. En particulier $v_1^{(2)}$ engendre un sous-module et c'est le seul sous-module propre de $W_\epsilon^{\mathrm{res}}(2)$. Cela montre que $W_\epsilon^{\mathrm{res}}(2)$ est réductible mais pas complètement réductible.

Chapitre 4

Caractères et produits tensoriels des représentations

Dans ce dernier chapitre, nous considérons les produits tensoriels de représentations de la spécialisation restreinte. La définition du produit tensoriel de deux représentations d'algèbre de Hopf est donnée dans la section 1.5 par (1.15). Nous commençons tout d'abord par donner une factorisation sous forme de produit tensoriel des représentations irréductibles $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda)$. Nous associons aussi à chaque représentation de dimension finie de la spécialisation restreinte un caractère, qui aide à leur classification. Enfin, nous donnons un aperçu des tilting modules.

4.1 Factorisation des représentations irréductibles

Commençons par donner une factorisation justifiant d'une autre façon que l'on peut se restreindre aux représentations irréductibles de type 1. On voit facilement que l'on peut définir un U_q-module de dimension 1 (donc irréductible) $V = \mathbb{C}v$ où l'action des générateurs est donnée par $K_i v = \sigma_i v$ et $X_i^{\pm} v = 0$. Il suffit de vérifier la compatibilité avec les relations de la définition 2.1.2. Alors ce module n'est autre que $V_q(\sigma, 0)$ et on en déduit le $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, 0) = W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, 0) = \mathbb{C}v_{\sigma,0}$ où l'action des générateurs est donnée par $X_i^{\pm} v_{\sigma,0} = (X_i^{\pm})^{m_i} v_{\sigma,0} = \left[\begin{smallmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i} v_{\sigma,0} = 0$ et $K_i v_{\sigma,0} = \sigma_i v_{\sigma,0}$. D'où

Lemme 4.1.1. *Soient $\sigma \in \{-1, +1\}^n, \lambda \in P^+$. On a un isomorphisme de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module*

$$V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda) \cong V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, 0) \otimes V_\epsilon^{\mathrm{res}}(1, \lambda) \tag{4.1}$$

Démonstration. Notons respectivement $v_{\sigma,0}$, $v_{1,\lambda}$ des vecteurs de plus haut poids de $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, 0)$, $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(1, \lambda)$. Alors comme nous le verrons dans la démonstration de la proposition 4.2.2, $v_{\sigma,0} \otimes v_{1,\lambda}$ est de poids (σ, λ). Par $\Delta(X_i^+) = X_i^+ \otimes K_i + 1 \otimes X_i^+$ et par la formule (2.7) évaluée en $r = m_i, q = \epsilon$ on trouve $X_i^+(v_{\sigma,0} \otimes v_{1,\lambda}) = (X_i^+)^{(m_i)}(v_{\sigma,0} \otimes v_{1,\lambda}) = 0$ donc $v_{\sigma,0} \otimes v_{1,\lambda}$ est un vecteur primitif de $V = V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, 0) \otimes V_\epsilon^{\mathrm{res}}(1, \lambda)$. De plus, on calcule facilement pour tout $x \in U_\epsilon^{\mathrm{res}-}$ que

$$x(v_{\sigma,0} \otimes v_{1,\lambda}) = \sigma_i(v_{\sigma,0} \otimes x v_{1,\lambda})$$

ce qui montre que $v_{\sigma,0} \otimes v_{1,\lambda}$ engendre V. Donc V est un module de plus haut poids (σ, λ). Enfin, soit V' un sous-module de V, (σ', λ') un poids maximal de V' et $v' \in V'_{\sigma',\lambda'}$ un vecteur primitif. Alors $v' = v_{\sigma,0} \otimes v''$ pour un $v'' \in V_\epsilon^{\mathrm{res}}(1, \lambda)$. On voit alors que $V' = V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, 0) \otimes V''$ où V'' est un sous-module de $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(1, \lambda)$. Donc $V'' = 0$ ou $V'' = V_\epsilon^{\mathrm{res}}(1, \lambda)$. Ainsi, V est irréductible et donc isomorphe à $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda)$. $\square$

Considérons maintenant la factorisation suivante, donnée dans [Lus1989]. On suppose que l est impair, premier avec les d_i et tel que $0 \leq d_i < l$. Tout $\lambda \in P^+$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $\lambda = \lambda_0 + l\lambda_1$ où $\lambda_0, \lambda_1 \in P^+$ et $\forall i, 0 \leq \lambda_0(\alpha_i^\vee) < l$. Alors on a l'isomorphisme de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module suivant

$$V_\epsilon^{\text{res}}(\lambda) \cong V_\epsilon^{\text{res}}(\lambda_0) \otimes V_\epsilon^{\text{res}}(l\lambda_1)$$

On note U_ϵ^{fin} la sous-algèbre de U_ϵ^{res} engendré par les $X_i^\pm$, $K_i^\pm$. C'est une algèbre de Hopf de dimension finie. Alors le premier facteur peut être vu comme un U_ϵ^{fin}-module irréductible tandis que le second peut être vu comme le tiré-en-arrière d'une représentation irréductible de $U(\mathfrak{g})$ par un certain morphisme $U_\epsilon^{\text{res}} \to U(\mathfrak{g})$.

On aimerait généraliser ce résultat avec nos hypothèses moins strictes. Le lemme 2.3.6 montre que si une algèbre contient $X_i^\pm$ et $(X_i^\pm)^{(m_i)}$ alors elle contient tous les $(X_i^\pm)^{(r)}$ et n'est donc pas de dimension finie. Pour avoir l'équivalent de la factorisation de Lusztig, on doit donc couper $\lambda(\alpha_i^\vee)$ au niveau m_i. On commence par quelques lemmes :

Lemme 4.1.2. *Soient $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. On suppose que $d_i |a_{ij}| = d_j |a_{ij}| < m$. Alors*

$$(X_i^\pm)^{(m_i)} X_j^\pm = \sum_{k=0}^{-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} m_i + a_{ij} - 1 + k \\ k \end{bmatrix}_{\epsilon_i} (X_i^\pm)^{(-a_{ij}-k)} (X_j^\pm) (X_i^\pm)^{(m_i+a_{ij}+k)} \tag{4.2}$$

$$X_i^\pm (X_j^\pm)^{(m_j)} = \sum_{k=0}^{-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} m_i + a_{ij} - 1 + k \\ k \end{bmatrix}_{\epsilon_i} (X_i^\pm)^{(m_i+a_{ij}+k)} (X_j^\pm) (X_i^\pm)^{(-a_{ij}-k)} \tag{4.3}$$

Démonstration. On travaille dans U_q. Pour simplifier les notations, notons $N = 1 - a_{ij}$, $e = q_i$, $A^k = (X_i^\pm)^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $B = X_j^\pm$. On a en particulier $A^l A^k = A^k A^l = \begin{bmatrix} k+l \\ k \end{bmatrix}_e A^{k+l}$. La relation (2.5) s'écrit alors

$$A^N B = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} A^{N-k} B A^k \tag{4.4}$$

Plus généralement, on montre par récurrence sur $M \geq 0$ que

$$A^{N+M} B = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \begin{bmatrix} k-1+M \\ k-1 \end{bmatrix}_e A^{N-k} B A^{k+M} \tag{4.5}$$

La formule est vrai pour $M = 0$, c'est (4.4). Si elle est vraie pour un $M \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} A^{N+M+1} B &= \frac{A}{[N+M+1]_e} A^{N+M} B \\ &= \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \frac{[N-k+1]_e}{[N+M+1]_e} \begin{bmatrix} k-1+M \\ k-1 \end{bmatrix}_e A^{N+1-k} B A^{k+M} \end{aligned}$$

Par changement d'indice $l = k - 1$, la somme des termes en $k > 1$ s'écrit

$$-\sum_{l=1}^{N-1} (-1)^{l+1} \frac{[N-l]_e}{[N+M+1]_e} \begin{bmatrix} l+M \\ l \end{bmatrix}_e A^{N-l} B A^{l+M+1} \tag{4.6}$$

Quant au terme en $k = 1$, il devient

$$\begin{aligned} \frac{[N]_e}{[N+M+1]_e} A^N B A^{1+M} &= \frac{[N]_e}{[N+M+1]_e} \left(\sum_{l=1}^{N} (-1)^{l+1} A^{N-l} B A^l \right) A^{1+M} \\ &= \sum_{l=1}^{N} (-1)^{l+1} \frac{[N]_e}{[N+M+1]_e} \begin{bmatrix} l+M+1 \\ l \end{bmatrix}_e A^{N-l} B A^{l+M+1} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Le facteur en $l = N$ dans (4.7) s'écrit

$$\frac{[N]_e}{[N+M+1]_e} \begin{bmatrix} N+M+1 \\ N \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} N-1+(M+1) \\ N-1 \end{bmatrix}_e$$

Si on additionne les termes en $1 \leq l \leq N-1$ dans (4.6) et (4.7) on trouve les facteurs

$$\begin{bmatrix} l-1+(M+1) \\ l-1 \end{bmatrix}_e \frac{[N]_e[l+M+1]_e - [N-l]_e[M+1]_e}{[N+M+1]_e[l]_e}$$

et après simplification, la fraction devient 1. Donc (4.5) est vraie au rang $M+1$.

On peut maintenant évaluer (4.5) en $M = m_i - (1-a_{ij})$ et $e = \epsilon_i$ et on obtient (4.2). On déduit (4.3) par symétrie. $\square$

Remarque 4.1.3. Soit $1 \leq i \leq n$. Supposons que pour tout $j \neq i$, $d_i\,|a_{ij}| = d_j\,|a_{ji}| < m$. La matrice de Cartan A étant indécomposable, il existe j tel $a_{ij} \neq 0$. Ceci implique que $1 \leq d_i < m$ et en particulier $m_i > 1$. Réciproquement, si $\forall i, 1 \leq d_i < m$, l'annexe A.1 montre que dans le cas des algèbres de Lie simple, on a alors $\forall 1 \leq i < j \leq n, d_i\,|a_{ij}| = d_j\,|a_{ji}| < m$.

Lemme 4.1.4. *On suppose* $\forall 1 \leq i < j \leq n, d_i\,|a_{ij}| = d_j\,|a_{ji}| < m$. *Soient* $\sigma \in \{-1,+1\}^n, \lambda \in P^+$.

1. *Si* $\forall i, \lambda(\alpha_i^\vee) \equiv 0 \mod m_i$ *alors pour tout* $1 \leq i \leq n$, $X_i^\pm.V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda) = 0$
2. *Si* $\forall i, 0 \leq \lambda(\alpha_i^\vee) < m_i$ *alors pour tout* $1 \leq i \leq n$, $(X_i^\pm)^{(m_i)}.V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda) = 0$.

Démonstration. On note $v_{\sigma,\lambda} \in V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda)$ un vecteur de plus haut poids.

Supposons tout d'abord que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\lambda(\alpha_i^\vee) \equiv 0 \mod m_i$.

Montrons que $X_i^\pm.v_{\sigma,\lambda} = 0$. $v_{\sigma,\lambda}$ étant un vecteur plus haut poids, le cas $\pm = +$ est immédiat. Raisonnons par l'absurde en supposant que $v = X_i^- v_{\sigma,\lambda} \neq 0$. Soit $1 \leq j \leq n$. Alors $X_j^+ v = X_j^+ X_i^- v_{\sigma,\lambda} = \left(X_i^- X_j^+ + \delta_{i,j}\frac{K_i - K_i^{-1}}{\epsilon_i - \epsilon_i^{-1}}\right) v_{\sigma,\lambda} = \delta_{i,j}\sigma_i \frac{\epsilon_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)} - \epsilon_i^{-\lambda(\alpha_i^\vee)}}{\epsilon_i - \epsilon_i^{-1}} v_{\sigma,\lambda}$. Comme $\lambda(\alpha_i^\vee)$ est divisible par m_i, $\epsilon_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)}$ est une puissance entière de $\epsilon_i^{m_i} \in \{-1,+1\}$ donc $\epsilon_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)} - \epsilon_i^{-\lambda(\alpha_i^\vee)} = 0$ d'où $X_j^+ v = 0$. Si $j \neq i$, alors par (2.24), $(X_j^+)^{(m_j)} v = X_i^- (X_j^+)^{(m_j)} v = 0$. Si $j = i$, on utilise (2.25) :

$$(X_j^+)^{(m_j)} v = \left(X_i^- (X_j^+)^{(m_j)} + \begin{bmatrix} K_i; 1-m_i \\ 1 \end{bmatrix}_{\epsilon_i} (X_i^+)^{(m_i-1)}\right) v_{\sigma,\lambda} = 0$$

Ainsi, v est un vecteur primitif de poids strictement inférieur à (σ,λ). Il engendre un sous-module propre de $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda)$, contradiction.

On définit maitenant par récurrence le sous-espace V_k de $V_{\sigma,\lambda}$ par $V_0 = \mathbb{C}v_{\sigma,\lambda}$ et pour tout $k \geq 0$,

$$V_{k+1} = \sum_{j=1}^n \left((X_j^-)^{(m_j)} V_k + (X_j^+)^{(m_j)} V_k\right)$$

Soit $V = \sum_k V_k$. Pour tout $v \in V_k$, $(X_i^\pm)^{(m_i)} v \in V_{k+1}$ donc $(X_i^\pm)^{(m_i)} V \subseteq V$. De plus les éléments de V sont des combinaisons linéraires de vecteurs de poids et on voit alors facilement que $K_i V \subseteq V$. Montrons par récurrence sur k que pour tout $1 \leq i \leq n$ on a $X_i^\pm.V_k = 0$. On a déjà montré le résultat pour $k = 0$. Supposons donc que l'hypothèse de récurrence est vraie pour $k \geq 0$. Les termes apparaissant dans $X_i^\pm V_{k+1}$ sont les suivants :

- $X_i^\pm (X_i^\pm)^{(m_i)} V_k = (X_i^\pm)^{(m_i)} X_i^\pm V_k = 0$.
- $X_i^\pm (X_j^\mp)^{(m_j)} V_k = (X_j^\mp)^{(m_j)} X_i^\pm V_k = 0$ avec $j \neq i$ (on utilise (2.24)).
- $X_i^\pm (X_i^\mp)^{(m_i)} V_k \subseteq ((X_i^\mp)^{(m_i)} X_i^\pm + (X_i^\mp)^{(m_i-1)} U_\epsilon^{\mathrm{res}0}) V_k = 0$ (on utilise (2.25)).
- $X_i^\pm (X_j^\pm)^{(m_j)} V_k = 0$ avec $j \neq i$ (on utilise (4.3)).

Donc l'hypothèse est vraie à l'ordre $k+1$ et $V \neq 0$ est un sous-module de $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda)$. Ce dernier étant irréductible on a $V = V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda)$. Finalement $\forall i, X_i^\pm.V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda) = 0$.

On suppose maintenant que pour tout $1 \leq i \leq n$, $0 \leq \lambda(\alpha_i^\vee) < m_i$ et on procède de la même façon.

Par définition, $(X_i^+)^{(m_i)} v_{\sigma,\lambda} = 0$. Dans la démonstration du théorème 3.3.7, on a trouvé que le plus petit $p_0 > 0$ tel que $(X_i^-)^{(p_0 m_i)} v_{\sigma,\lambda} = 0$ satisfait (3.22) i.e. $(p_0 - 1) m_i \leq \lambda(\alpha_i^\vee) < p_0 m_i$. Si de plus $0 \leq \lambda(\alpha_i^\vee) < m_i$ alors $p_0 = 1$ et $(X_i^-)^{(m_i)} v_{\sigma,\lambda} = 0$.

On définit maintenant par récurrence le sous-espace W_k de $V_{\sigma,\lambda}$ par $W_0 = \mathbb{C} v_{\sigma,\lambda}$ et pour tout $k \geq 0$,

$$W_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^+ W_k + X_i^- W_k \right)$$

On pose $W = \sum_k W_k$. Par définition W est stable par $X_i^\pm$. Les éléments de W sont des combinaisons linéaires de vecteurs de poids et voit alors que W est aussi stable par K_i. Montrons par récurrence sur k que $(X_i^\pm)^{(m_i)} W_k \subseteq W$. On a déjà montré le résultat pour $k = 0$. Les termes apparaissant dans $(X_i^\pm)^{(m_i)} W_{k+1}$ sont :

– $(X_i^\pm)^{(m_i)} X_i^\pm W_k = X_i^\pm (X_i^\pm)^{(m_i)} W_k \subseteq W$
– $(X_i^\mp)^{(m_i)} X_j^\pm W_k = X_j^\pm (X_i^\mp)^{(m_i)} W_k \subseteq W$ avec $j \neq i$ (on utilise (2.24)).
– $(X_i^\mp)^{(m_i)} X_i^\pm W_k \subseteq \left(X_i^\pm (X_i^\mp)^{(m_i)} + U_\epsilon^{\mathrm{res}0} (X_i^\mp)^{(m_i - 1)} \right) W_k \subseteq W$ (on utilise (2.25)).
– $(X_i^\pm)^{(m_i)} X_j^\pm W_k \subseteq W$ avec $j \neq i$ (on utilise (4.2)).

donc la propriété est vraie à l'ordre $k+1$ et $W \neq 0$ est un sous-module de $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda)$. Ce dernier étant irréductible on a $W = V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda)$.

Notons que la récurrence ne permet a priori pas de montrer directement que $\forall i, (X_i^\pm)^{(m_i)} W_k = 0$ (l'argument ne fonctionne ni pour $(X_i^\mp)^{(m_i)} X_i^\pm W_k$ ni pour $(X_i^\pm)^{(m_i)} X_j^\pm W_k$). Nous allons utiliser une méthode qui s'inspire du constat de la proposition 4.1.7. On donne une structure de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module à W en gardant l'action des $X_i^\pm, K_i^{\pm 1}$ et en fixant arbitrairement l'action des $(X_i^\pm)^{(m_i)}$ à 0. On vient de montrer que W était engendré par l'action des $X_i^\pm$ sur $v_{\sigma,\lambda}$. Donc W muni de cette nouvelle action est un module irréductible de plus haut poids (σ, λ). L'identité est un isomorphisme de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module entre W (muni de l'action que l'on vient de définir) et $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda)$. Donc en fait $(X_i^\pm)^{(m_i)} . V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda) = 0$. □

Theorème 4.1.5. *On suppose* $\forall 1 \leq i < j \leq n, d_i |a_{ij}| = d_j |a_{ji}| < m$. *Soit* $\lambda \in P^+$ *et écrivons ce poids* $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$ *où pour tout* $1 \leq i \leq n$, $0 \leq \lambda_0(\alpha_i^\vee) < m_i$ *et* $\lambda_1(\alpha_i^\vee) \equiv 0 \mod m_i$. *Alors on a un isomorphisme de* $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$*-module*

$$V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda) \cong V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_0) \otimes V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_1) \tag{4.8}$$

Démonstration. Soit $v_0 \in V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_0)$ et $v_1 \in V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_1)$ des vecteurs de plus haut poids. Alors pour $1 \leq i \leq n$, $X_i^+ v_0 = X_i^+ v_1 = (X_i^+)^{(m_i)} v_0 = (X_i^+)^{(m_i)} v_1 = 0$. Par $\Delta(X_i^+) = X_i^+ \otimes K_i + 1 \otimes X_i^+$ et par la formule (2.7) évaluée en $r = m_i, q = \epsilon$ on trouve $X_i^+(v_0 \otimes v_1) = (X_i^+)^{(m_i)}(v_0 \otimes v_1) = 0$. Nous verrons dans la démonstration de la proposition 4.2.2 que $v_0 \otimes v_1$ est un vecteur de poids $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$. Donc $v_0 \otimes v_1$ est un vecteur primitif de $V = V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_0) \otimes V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_1)$.

Montrons maintenant que $v_0 \otimes v_1$ engendre v. Soient $v_0' \in V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_0)$ et $v_1' \in V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_1)$ non nuls. v_0, v_1 engendrent respectivement $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_0)$ et $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_1)$. D'après le second point du lemme 4.1.4, il existe x_0 combinaison linéaire de produits de X_i^- telle que $v_0' = x_0 v_0$. Similairement, il existe x_1 combinaison linéaire de produits de $(X_i^-)^{(m_i)}$ telle que $v_1' = x_1 v_1$. La formule (2.8) évaluée en $r = m_i, q = \epsilon$ s'écrit

$$\Delta((X_i^-)^{(m_i)}) = \sum_{k=0}^{m_i} \epsilon_i^{k(m_i - k)} (X_i^-)^{(k)} K_i^{m_i - k} \otimes (X_i^-)^{(m_i - k)}$$

Si on applique cette expression au vecteur $v_0 \otimes v_1$ alors d'après le premier point du lemme 4.1.4, seul le terme $k = 0$ agit de façon non nul et on trouve $(X_i^-)^{(m_i)}(v_0 \otimes v_1) = (\epsilon_i^{m_i})^{\lambda_0(\alpha_i^\vee)} (v_0 \otimes (X_i^-)^{(m_i)} v_1)$. Il existe donc un x_1' combinaison linéaire de produits de $(X_i^-)^{(m_i)}$ (obtenue en modifiant éventuellement les signes des cofficients de la combinaison linéaire x_1) telle que $x_1'(v_0 \otimes v_1) = (v_0 \otimes x_1 v_1) = (v_0 \otimes v_1')$. Maintenant, on a

$$\Delta(X_i^-) = X_i^- \otimes 1 + K_i^{-1} \otimes X_i^-$$

et à nouveau par le premier point du lemme 4.1.4 on obtient $X_i^-(v_0 \otimes x_1 v_1) = (X_i^- v_0 \otimes x_1 v_1)$ et finalement $x_0 x_1'(v_0 \otimes v_1) = (v_0' \otimes v_1')$.

Il reste à montrer que V est irréductible. Soit V' un sous-module propre de V et λ' un poids maximal de V'. Tout vecteur non nul $v' \in V'_{\lambda'}$ est primitif. Soit $\{w_1, ..., w_p\}$ une base de $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_1)$ telle que l'action des K_i est diagonale i.e. telle qu'il existe des $c_{ir} \in \mathbb{C}^*$ tels que $K_i w_r = c_{ir} w_r$. Alors il existe $u_1, u_2, ..., u_p \in V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_0)$ tels que

$$v' = \sum_{r=1}^{p} u_r \otimes w_r$$

et par le premier point du lemme 4.1.4 on a

$$0 = X_i^+ v' = \sum_{r=1}^{p} X_i^+ u_r \otimes c_{ir} w_r$$

Alors pour tout i, r on a $X_i^+ u_r = 0$. Donc u_r est un multiple de v_0 et $v' = v_0 \otimes v_1'$ pour un certain $v_1' \in V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_1)$. On utilise à nouveau la formule (2.7) évaluée en $r = m_i, q = \epsilon$ et on obtient $0 = (X_i^+)^{m_i} v' = v_0 \otimes ((X_i^+)^{(m_i)} v_1')$ et v_1' est un multiple de v_1. Finalement, le vecteur $v_0 \otimes v_1 \in V'$ et engendre V donc $V = V'$, contradiction. $\square$

Corollaire 4.1.6. *On suppose $\forall 1 \leq i < j \leq n, d_i |a_{ij}| = d_j |a_{ji}| < m$. Soient $\sigma \in \{-1, +1\}^n, \lambda \in P^+$.*

- *Écrivons $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$ où pour tout $1 \leq i \leq n$, $0 \leq \lambda_0(\alpha_i^\vee) < m_i$ et $\lambda_1(\alpha_i^\vee) \equiv 0 \mod m_i$. Alors*

$$V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda) \cong V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, 0) \otimes V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_0) \otimes V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_1) \tag{4.9}$$

- *Supposons m premier avec les d_i. Écrivons $\lambda = \lambda_0 + m\lambda_1$ où pour tout $1 \leq i \leq n$, $0 \leq \lambda_0(\alpha_i^\vee) < m$. Alors*

$$V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda) \cong V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, 0) \otimes V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_0) \otimes V_\epsilon^{\mathrm{res}}(m\lambda_1) \tag{4.10}$$

- *Supposons l impair et premier avec les d_i. Écrivons $\lambda = \lambda_0 + l\lambda_1$ où pour tout $1 \leq i \leq n$, $0 \leq \lambda_0(\alpha_i^\vee) < l$. Alors*

$$V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda) \cong V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, 0) \otimes V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_0) \otimes V_\epsilon^{\mathrm{res}}(l\lambda_1) \tag{4.11}$$

Étudions plus en détails ces factorisations. Le premier facteur $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, 0)$ est décrit ci-dessus et ne pose pas de problème. Le second facteur dans (4.9) peut être vu comme un $U_\epsilon^{\mathrm{fin}}$-module au sens de la proposition 4.1.7. Notons pour l'énoncer que tout $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module peut être vu, par restriction de l'action de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$, comme un $U_\epsilon^{\mathrm{fin}}$-module. Réciproquement tout $U_\epsilon^{\mathrm{fin}}$-module V peut être vu comme un $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module en étendant l'action par $\forall i, (X_i^\pm)^{(m_i)} V = 0$. En particulier, si V est irréductible de dimension finie comme $U_\epsilon^{\mathrm{fin}}$-module, il l'est aussi comme $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module et possède donc un type σ et un plus haut poids $\lambda \in P^+$. Alors on a le résultat suivant :

Proposition 4.1.7. *On suppose $\forall 1 \leq i < j \leq n, d_i |a_{ij}| = d_j |a_{ji}| < m$. La restriction de l'action de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$ à $U_\epsilon^{\mathrm{fin}}$ et le prolongement (par zéro) de l'action de $U_\epsilon^{\mathrm{fin}}$ à $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$ définissent une correspondance biunivoque entre :*

1. *Les $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-modules irréductibles de dimension finie de type σ dont le plus haut poids $\lambda \in P^+$ satisfait $\forall i, 0 \leq \lambda(\alpha_i^\vee) < m_i$.*
2. *Les $U_\epsilon^{\mathrm{fin}}$ modules irréductibles de dimension finie de type σ.*

De telles représentations irréductibles sont au nombre de $\prod_{i=1}^n m_i$.

Démonstration. Soient deux U_ϵ^{res}-module irréductibles de dimension finie, de type σ et de plus haut poids $\lambda \neq \mu \in P^+$ satisfaisant $\forall i, 0 \leq \lambda(\alpha_i^\vee), \mu(\alpha_i^\vee) < m_i$. Alors il existe i tel que $\lambda(\alpha_i^\vee) \neq \mu(\alpha_i^\vee)$ et par conséquent K_i agit de façon différente sur un vecteur de plus haut poids et cela reste vrai par restriction. Donc pour un type σ fixé, deux représentations distinctes de U_ϵ^{res} donnent, par restriction de l'action, des représentations de U_ϵ^{fin} distinctes. Inversement, deux représentations de U_ϵ^{fin} distinctes donnent (par prolongement de l'action par zéro) des représentations de U_ϵ^{res} distinctes.

Si V est un U_ϵ^{fin}-module irréductible de dimension finie de type σ alors comme on l'a vu plus haut, le prolongement de l'action par zéro donne un U_ϵ^{res}-module irréductible de dimension finie de type σ et de poids $\lambda \in P^+$. Soit v un vecteur de plus haut poids. Alors (2.25) évalué en $r = s = m_i$ et $q = \epsilon$ donne $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} v = 0 = \left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i} \right\rfloor v$. Ainsi pour tout $1 \leq i \leq n$, $0 \leq \lambda(\alpha_i^\vee) < m_i$.

Considérons $V_\epsilon^{\text{res}}(\sigma, \lambda)$ une représentation irréductible de U_ϵ^{res}. Si $\forall i, 0 \leq \lambda(\alpha_i^\vee) < m_i$ alors le second point du lemme 4.1.4 montre que les $(X_i^\pm)^{(m_i)}$ agissent de façon nulle sur $V_\epsilon^{\text{res}}(\lambda)$. Ainsi la restriction de l'action à V est aussi irréductible (et par définition de type σ).

Pour définir une telle représentation irréductible de type σ, il suffit de se donner les valeurs $\lambda(\alpha_i^\vee)$ entre 0 et $m_i - 1$ et il y en a donc $\prod_{i=1}^n m_i$. ☐

Tournons nous maintenant vers le troisième facteur. Lorsque l est impair et premier avec les d_i Lusztig a construit le morphisme de Frobenius dans la proposition 4.1.8 ci-dessous et qui permet de se ramener aux représentations bien connues de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$.

Proposition 4.1.8. *Supposons l impair, premier avec les d_i et tel que $0 \leq d_i < l$ alors*

(i) Il existe un unique morphisme d'algèbre $\mathrm{Fr} : U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ tel que $\mathrm{Fr}(K_i) = 1$, $\mathrm{Fr}((X_i^\pm)^{(r)}) = (X_i^\pm)^{(r/l)}$ si $r \equiv 0 \mod l$ et $\mathrm{Fr}((X_i^\pm)^{(r)}) = 0$ sinon.

(ii) Soit $\lambda \in P^+$ et notons $\rho : U(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V(\lambda))$ la représentation irréductible de $U(\mathfrak{g})$ de plus haut poids λ. Alors $\rho \circ \mathrm{Fr} : U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V(\lambda))$ est une représentation de $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ isomorphe à $V_\epsilon^{\text{res}}(l\lambda)$.

Démonstration. Voir [Lus1990b]. ☐

Revenons au cas général et considérons le troisième facteur dans la décomposition (4.9). Si $\mu \leq \lambda_1$ et $V_\epsilon^{\text{res}}(1, \lambda_1)_\mu \neq 0$ alors par le premier point du lemme 4.1.4 on a nécessairement pour tout i, $\mu(\alpha_i^\vee) \equiv 0 \mod m_i$. K_i agit sur les vecteurs v de poids μ par

$$K_i v = (\epsilon_i^{m_i})^{\frac{\mu(\alpha_i^\vee)}{m_i}} v \tag{4.12}$$

Pour généraliser la proposition 4.1.8, on voudrait que Fr envoit K_i sur un élément de la sous-algèbre $U^0(\mathfrak{g})$ engendrée par les H_i qui agirait comme (4.12). Les H_i agissent sur les vecteurs de poids μ' par multiplication par un entier $\mu'(\alpha_i^\vee)$ quelconque. Mais si $m_i < l$, alors l'action (4.12) n'est plus nécessairement constante et il semble donc difficile de trouver un élément de $U^0(\mathfrak{g})$ qui convienne. En revanche, comme $\epsilon_i^{m_i} \in \{-1, +1\}$ on a toujours $K_i^2 - 1$ qui agit de façon nulle. Cela suggère d'utiliser à la place $U_s(\mathfrak{g}) = U_s^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ pour un certain $s \in \{-1, +1\}$:

Proposition 4.1.9. *On suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple et que $l \not\equiv 0 \mod 4$. Posons $s = \epsilon^m = (-1)^{l+1}$. On suppose enfin qu'il existe un morphisme d'algèbre $\mathrm{Fr} : U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g}) \to U_s(\mathfrak{g})$ tel que $\mathrm{Fr}(K_i) = K_i$, $\mathrm{Fr}((X_i^\pm)^{(m_i)}) = X_i^\pm$ et $\mathrm{Fr}(X_i^\pm) = 0$.*

Soit $\lambda \in P^+$ tel que $\forall i, \lambda(\alpha_i^\vee) \equiv 0 \mod m_i$ et posons $\lambda' = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i}\omega_i$. Si $\rho : U_s(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V_s(\lambda'))$ est la représentation irréductible de $U_s(\mathfrak{g})$ de plus haut poids λ' alors $\rho \circ \mathrm{Fr} : U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V_s(\lambda'))$ est une représentation de $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ isomorphe à $V_\epsilon^{\text{res}}(\lambda)$.

Démonstration. Par définition, Fr est surjective. Cela implique qu'un sous-espace de $V_s(\lambda')$ stable pour l'action de $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ l'est a fortiori pour l'action de $U_s(\mathfrak{g})$. Ainsi, $V_s(\lambda')$ est aussi irréductible comme $U_\epsilon^{\text{res}}(\mathfrak{g})$-module. Cela implique de plus que si v est un plus haut poids de $V_s(\lambda')$, il engendre aussi $V_s(\lambda')$ comme

$U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$-module. D'après la définition de Fr, on a $(\rho \circ \mathrm{Fr})(X_i^+)(v) = 0 \cdot v = 0$ et $(\rho \circ \mathrm{Fr})\left((X_i^+)^{(m_i)}\right) \cdot v = X_i^+ \cdot v = 0$. Il reste donc à montrer que v est un vecteur poids λ quand $V_s(\lambda')$ est vu en tant que $U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$-module.

L'hypothèse $l \not\equiv 0 \mod 4$ est équivalente à m impair et par (2.36), on a

$$\epsilon_i^{m_i} = (-1)^{(l+1)(m+1)}\left((-1)^{(l+1)m}\right)^{d_i} = s_i \tag{4.13}$$

De plus, m_i est impair pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors $s_i^{\lambda'(\alpha_i^\vee)} = \epsilon_i^{m_i\lambda'(\alpha_i^\vee)} = \epsilon_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)}$ et $(\epsilon_i^{m_i})^{\lambda(\alpha_i^\vee)+1} = (\epsilon_i^{m_i})^{m_i\lambda'(\alpha_i^\vee)}\epsilon_i^{m_i} = ((-1)^{m_i+1}(\epsilon_i^{m_i}))^{\lambda'(\alpha_i^\vee)} s_i = s_i^{\lambda'(\alpha_i^\vee)+1}$. Par conséquent, K_i et $\left[\begin{smallmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{smallmatrix}\right]_{\epsilon_i}$ agissent sur v par

$$\begin{aligned}(\rho \circ \mathrm{Fr})(K_i)(v) &= K_i \cdot v \\ &= s_i^{\lambda'(\alpha_i^\vee)} v \\ &= \epsilon_i{}^{\lambda(\alpha_i^\vee)} v\end{aligned} \tag{4.14}$$

et

$$\begin{aligned}(\rho \circ \mathrm{Fr})\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i}\right) \cdot v &= \left([\mathrm{Fr}((X_i^+)^{(m_i)}), \mathrm{Fr}((X_i^\pm)^{(m_i)})]\right) \cdot v \\ &= [X_i^+, X_i^-] \cdot v \\ &= \begin{bmatrix} K_i;0 \\ 1 \end{bmatrix}_{s_i} \cdot v \\ &= s_i^{\lambda'(\alpha_i^\vee)+1} \lambda'(\alpha_i^\vee) \\ &= (-1)^{m_i+1} \epsilon_i^{m_i(\lambda(\alpha_i^\vee)+1)} \left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i} \right\rfloor\end{aligned} \tag{4.15}$$

□

Lorsque $l \equiv 0 \mod 4$, il semble nécessaire de plonger $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$ dans une algèbre $U_{\epsilon'}^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ pour un ϵ' d'ordre plus grand. La proposition 4.1.10 propose une solution à ce problème :

Proposition 4.1.10. *On suppose que* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie simple, que* $l \equiv 0 \mod 4$ *et* $l \neq 4$. *On définit* $m' = \mathrm{ppcm}_{d \in D} \, \mathrm{pgcd}(d, m)$ *où*

- $D = \{d_1, d_2, ..., d_n, 4\}$ *si* $l \equiv 0 \mod 8$
- $D = \{d_1, d_2, ..., d_n, 2, r\}$ *si* $l \not\equiv 0 \mod 8$ *où* r *est le plus petit diviseur premier de* $m/2$.

Définissons $l' = 2m'$ *et pour tout* $1 \leq i \leq n$, $m_i' = \frac{m'}{m} m_i$. *On considère la racine de l'unité* $\epsilon' = \epsilon^{l/l'}$ *d'ordre* l'.

On suppose qu'il existe un morphisme d'algèbre $\mathrm{Fr} : U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g}) \to U_{\epsilon'}^{\mathrm{res}}$ *tel que* $\mathrm{Fr}(K_i) = K_i$, $\mathrm{Fr}((X_i^\pm)^{(m_i)}) = (X_i^\pm)^{(m_i')}$ *et* $\mathrm{Fr}(X_i^\pm) = 0$.

Soit $\lambda \in P^+$ *tel que* $\forall i, \lambda(\alpha_i^\vee) \equiv 0 \mod m_i$ *et posons* $\lambda' = \sum_{i=1}^n \frac{m_i'}{m_i}\lambda(\alpha_i^\vee)\omega_i$. *Si* $\rho : U_{\epsilon'}^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V_{\epsilon'}(\lambda'))$ *est la représentation irréductible de* $U_{\epsilon'}^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ *de plus haut poids* λ' *alors* $\rho \circ \mathrm{Fr} : U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V_{\epsilon'}(\lambda'))$ *est une représentation de* $U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ *isomorphe à* $V_\epsilon(\lambda)$.

Démonstration. Notons tout d'abord que $l \equiv 0 \mod 4$ implique que m est pair. Si $l \equiv 0 \mod 8$ alors m est divisible par 4 et $\forall i, 1 \leq d_i < 4 \leq m'$. Sinon, comme on suppose $l \neq 4$, $m/2 > 1$ et possède donc un diviseur premier $r > 2$. A nouveau, $\forall i, 1 \leq d_i < 2r \leq m'$. De plus, $\epsilon' = \epsilon^{l/l'}$ est clairement d'ordre l' puisque ϵ est d'ordre l. Ensuite, m' correspond bien à la définition usuelle : l' est pair et $m' = l'/2$. On remarque que par définition, m' divise m. Comme l est pair, $l/l' = (2m)/(2m') = m/m'$.

Considérons $1 \leq i \leq n$. Si $d_i = 2$, $\mathrm{pgcd}(d_i, m) = 2 = \mathrm{pgcd}(d_i, m')$. Sinon, par définition de m', soit $\mathrm{pgcd}(d_i, m) = 1$ et alors $\mathrm{pgcd}(d_i, m') = 1$, soit $\mathrm{pgcd}(d_i, m) = d_i$ et alors $\mathrm{pgcd}(d_i, m') = d_i$. Donc $\frac{m'}{\mathrm{pgcd}(d_i, m')} =$

$\frac{m'}{\mathrm{pgcd}(d_i,m)} = \frac{m'}{m/m_i} = m'_i$ et m'_i correspond bien à la définition usuelle. Notons alors que $\epsilon' = \epsilon^{l/l'} = \epsilon^{m/m'} = \epsilon^{m_i/m'_i}$ et en particulier ${\epsilon'_i}^{m'_i} = {\epsilon_i}^{m_i}$. Si m est divisible par 4 alors m' aussi par définition et m_i, m'_i sont toujours pairs. Sinon, m, m' sont divisible par 2 mais pas par 4 : m_i, m'_i sont impairs si $d_i = 2$ et pairs sinon. Donc m_i, m'_i ont même parité et $(-1)^{m_i+1} = (-1)^{m'_i+1}$.

Soit v un vecteur de plus haut poids pour $V_{\epsilon'}(\lambda')$. Comme indiqué plus haut, $1 \leq d_i < m'$ pour tout i donc en particulier $m'_i > 1$ et Fr n'est par surjective. Néanmoins, $1 \leq i \leq n$, $\lambda'(\alpha_i^\vee) \equiv 0 \mod m'_i$ donc le lemme 4.1.4 et la remarque 4.1.3 montre que l'action des $(X_i^\pm)^{(m'_i)}$ sur v engendre $V_{\epsilon'}(\lambda')$ et que les $X_i^\pm$ agissent de façon nulle. Donc en tant que $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module, $V_{\epsilon'}(\lambda')$ est irréductible et engendré par v. De plus $(\rho \circ \mathrm{Fr})(X_i^+)(v) = 0 \cdot v = 0$ et $(\rho \circ \mathrm{Fr})\left((X_i^+)^{(m_i)}\right) \cdot v = (X_i^+)^{(m'_i)} \cdot v = 0$.

Il reste donc à montrer que v est un vecteur de poids λ quand $V_{\epsilon'}(\lambda')$ est vu en tant que $U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$-module. K_i et $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$ agissent sur v par

$$\begin{aligned}(\rho \circ \mathrm{Fr})(K_i)(v) &= K_i \cdot v \\ &= {\epsilon'_i}^{\lambda'(\alpha_i^\vee)} v \\ &= {\epsilon_i}^{\frac{m_i}{m'_i}\lambda'(\alpha_i^\vee)} v \\ &= {\epsilon_i}^{\lambda(\alpha_i^\vee)} v\end{aligned} \tag{4.16}$$

et

$$\begin{aligned}(\rho \circ \mathrm{Fr})\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i}\right) \cdot v &= \begin{bmatrix} K_i;0 \\ m'_i \end{bmatrix}_{s_i} \cdot v \\ &= (-1)^{m'_i+1}\left({\epsilon'_i}^{m'_i}\right)^{\lambda'(\alpha_i^\vee)+1} \left\lfloor \frac{\lambda'(\alpha_i^\vee)}{m'_i} \right\rfloor \\ &= (-1)^{m'_i+1}\left({\epsilon'_i}^{{m'_i}^2}\right)^{\frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i}} {\epsilon'_i}^{m'_i} \left\lfloor \frac{\lambda'(\alpha_i^\vee)}{m'_i} \right\rfloor \\ &= \left((-1)^{m'_i+1}\left({\epsilon'_i}^{m'_i}\right)\right)^{\frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i}+1} \left\lfloor \frac{\lambda'(\alpha_i^\vee)}{m'_i} \right\rfloor \\ &= \left((-1)^{m_i+1}\left(\epsilon_i^{m_i}\right)\right)^{\frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i}+1} \left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i} \right\rfloor \\ &= (-1)^{m_i+1}\left({\epsilon_i}^{m_i^2}\right)^{\frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i}} \epsilon_i^{m_i} \left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i} \right\rfloor \\ &= (-1)^{m_i+1}({\epsilon_i}^{m_i})^{\lambda(\alpha_i^\vee)+1} \left\lfloor \frac{\lambda(\alpha_i^\vee)}{m_i} \right\rfloor\end{aligned} \tag{4.17}$$

□

Pour améliorer cette section, il faudrait étudier plus précisément la $\mathcal{A}$-base donnée dans la proposition 2.2.9. Ainsi, pour fixer arbitrairement l'action des $(X_i^\pm)^{(m_i)}$ à la fin de la démonstration du lemme 4.1.4 nous avons implicitement supposé qu'ils ne peuvent pas s'exprimer en fonction des $X_j^\pm$, K_j. De façon équivalente, nous supposons que $U_\epsilon^{\mathrm{fin}}$ est bien de dimension finie. De même, certains énoncés supposent l'existence d'un morphisme $\mathrm{Fr} : U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g}) \to U_{\epsilon'}^{\mathrm{res}}$ en se donnant l'image des générateurs $X_i^\pm$, $(X_i^\pm)^{(m_i)}$ et $K_i^{\pm 1}$. Il faudrait vérifier que l'on peut bien fixer l'image de ces générateurs de cette façon. Dans la proposition 4.1.10, on pourrait en fait choisir un Fr surjectif (par exemple $\mathrm{Fr}(X_i^\pm) = X_i^\pm$ ou $\mathrm{Fr}(X_i^\pm) = (1 - \delta_{m_i',1})\, X_i^\pm$) ce qui permettrait de retirer les hypothèses techniques. On obtiendrait alors :

Conjecture 4.1.11. Dans le premier point du corollaire 4.1.6, $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_1)$ s'interprète comme le tiré-en-arrière d'un $U_{\epsilon'}^{\mathrm{res}}$-module par un morphisme $\mathrm{Fr} : U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g}) \to U_{\epsilon'}^{\mathrm{res}}$ où ϵ' est d'ordre l' divisant 24.

Notons pour terminer cette section que les résultats sur la représentations restreintes ont été inspirés de travaux existants sur les groupes algébriques sur un corps de caractéristique p. En particulier, on a diverses analogies entre les représentations de ces groupes algébriques et celles de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$ pour $l = p$, ce qui explique aussi pourquoi le cas l impair a été étudié davantage. Ainsi, Lusztig compare sa décomposition (4.11) et l'interprétation du facteur $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_1)$ à l'aide du morphisme de Frobenius avec le théorème de Steinberg pour les groupes algébriques. Lusztig a aussi énoncé dans [Lus1990a] une conjecture reliant les représentations de $U_\epsilon^{\mathrm{fin}}$ et sa contrepartie pour les groupes algébriques lorsque $l = p$ est assez grand.

4.2 Caractères des représentations

Dans cette section, nous définissions les caractères des $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module V de dimension finie et énonçons les formules des caractères pour les représentations irréductibles.

Définition 4.2.1. On définit le caractère d'un $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module V de dimension finie comme la somme formelle

$$\chi(V) = \sum_{\sigma,\lambda} \dim(V_{\sigma,\lambda})(\sigma e^\lambda) \tag{4.18}$$

où $(\sigma e^\lambda)(\sigma' e^{\lambda'}) = (\sigma\sigma')e^{\lambda+\lambda'}$.

Le caractère possède les propriétés usuelles :

Proposition 4.2.2. *Soient V, W des $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-modules de dimension finie. Alors*

1. $\chi(V \oplus W) = \chi(V) + \chi(W)$
2. $\chi(V \otimes W) = \chi(V)\chi(W)$

Démonstration. le premier point est évident. Pour le second, la preuve est totalement similaire à celle de la proposition 11.2.4 de [CP1994]. Il suffit de montrer que si $v \in V, w \in W$ sont des vecteurs de poids respectifs (σ, λ) et (σ', λ') alors $v \otimes w$ a pour poids $(\sigma\sigma', \lambda + \lambda')$. On a

$$\begin{aligned}\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i \Rightarrow K_i.(v \otimes w) &= (K_i v) \otimes (K_i w)\\ &= (\sigma_i \epsilon_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)} v) \otimes (\sigma'_i \epsilon_i^{\lambda'(\alpha_i^\vee)} w)\\ &= (\sigma_i\sigma'_i)\epsilon_i^{(\lambda+\lambda')(\alpha_i^\vee)}(v \otimes w)\end{aligned} \tag{4.19}$$

Par (2.13) et (1.3), on voit facilement que $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ r \end{bmatrix}_{\epsilon_i} v = \sigma_i^r \begin{bmatrix} \lambda(\alpha_i^\vee) \\ r \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$ pour $1 \le r < m_i$. Par (3.17), c'est aussi vrai pour $r = m_i$. De même pour w, σ'_i, λ'. En utilisant l'expression (2.22) pour évaluer $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i}.(v \otimes w)$, on voit qu'il reste à montrer que

$$\sum_{s=0}^{m_i} (\sigma_i\sigma'_i)^{m_i} \begin{bmatrix} \lambda(\alpha_i^\vee) \\ m_i - s \end{bmatrix}_{\epsilon_i} \begin{bmatrix} \lambda'(\alpha_i^\vee) \\ s \end{bmatrix}_{\epsilon_i} (\epsilon_i^{m_i})^{\lambda'(\alpha_i^\vee)} \epsilon_i^{(\lambda+\lambda')(\alpha_i^\vee)s} = (\sigma_i\sigma'_i)^{m_i} \begin{bmatrix} (\lambda+\lambda')(\alpha_i^\vee) \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$$

Cette égalité peut alors être démontrée en considérant (1.11) évaluée en $q = \epsilon_i$. On considére le terme de degré $x^{m_i} y^{(\lambda+\lambda')(\alpha_i^\vee)-m_i}$ de $(x+y)^{(\lambda+\lambda')(\alpha_i^\vee)} = (x+y)^{\lambda(\alpha_i^\vee)}(x+y)^{\lambda'(\alpha_i^\vee)}$. Pour le membre de gauche, il s'écrit $\begin{bmatrix} (\lambda+\lambda')(\alpha_i^\vee) \\ m_i \end{bmatrix}_{\epsilon_i} \epsilon_i^{((\lambda+\lambda')(\alpha_i^\vee)-m_i)m_i} x^{m_i} y^{(\lambda+\lambda')(\alpha_i^\vee)-m_i}$. Pour le membre de droite, il s'écrit

$$\sum_{s=0}^{m_i}\left(\begin{bmatrix}\lambda(\alpha_i^\vee)\\ m_i-s\end{bmatrix}_{\epsilon_i}\epsilon_i^{(m_i-s)(\lambda(\alpha_i^\vee)-(m_i-s))}x^{m_i-s}y^{\lambda(\alpha_i^\vee)-(m_i-s)}\right)\left(\begin{bmatrix}\lambda'(\alpha_i^\vee)\\ s\end{bmatrix}_{\epsilon_i}\epsilon_i^{s(\lambda'(\alpha_i^\vee)-s)}x^s y^{\lambda'(\alpha_i^\vee)-s}\right)=$$

$$\sum_{s=0}^{m_i}\begin{bmatrix}\lambda'(\alpha_i^\vee)\\ s\end{bmatrix}_{\epsilon_i}\begin{bmatrix}\lambda(\alpha_i^\vee)\\ m_i-s\end{bmatrix}_{\epsilon_i}\epsilon_i^{s(\lambda'(\alpha_i^\vee)-s)+(m_i-s)(\lambda(\alpha_i^\vee)-(m_i-s))+2(\lambda(\alpha_i^\vee)-(m_i-s))s}x^{m_i}y^{(\lambda+\lambda')(\alpha_i^\vee)-m_i}=$$

$$\left(\sum_{s=0}^{m_i}\begin{bmatrix}\lambda'(\alpha_i^\vee)\\ s\end{bmatrix}_{\epsilon_i}\begin{bmatrix}\lambda(\alpha_i^\vee)\\ m_i-s\end{bmatrix}_{\epsilon_i}(\epsilon_i^{m_i})^{\lambda'(\alpha_i^\vee)}\epsilon_i^{(\lambda+\lambda')(\alpha_i^\vee)s}\right)\epsilon_i^{((\lambda+\lambda')(\alpha_i^\vee)-m_i)m_i}x^{m_i}y^{(\lambda+\lambda')(\alpha_i^\vee)-m_i}$$

Ce qui donne le résultat escompté. □

De la proposition 3.1.7, on déduit immédiatement que

Proposition 4.2.3. *Le caractère de $W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda)$ est donné par la formule des caractères de Weyl.* □

Évidemment si $W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda)$ est irréductible, alors $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda)=W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda)$ et on peut calculer $\chi(V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda))$ par la formule des caractères de Weyl. Andersen, Polo et Wen étudient en détail la théorie cohomologique des représentations de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$ dans [APW1991] et donnent certaines conditions pour lesquelles cette égalité a lieu. En particulier, on a la proposition suivante :

Proposition 4.2.4. *On suppose l impair, premier avec les d_i et tel que $0<d_i<l$. Alors pour tout $\lambda\in P^+$, $W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda)$ est irréductible*

1. *Si $(\lambda+\rho)(\alpha^\vee)<l$ pour tout $\alpha\in\Delta^+$*
2. *Ou bien si $\lambda=(l-1)\rho+l\mu$ pour un certain $\mu\in P^+$.*

Dans [Lus1990c], Lusztig formule une conjecture exprimant $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda)$ comme une combinaison linéaire des modules de Weyl $\{W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mu)|\mu\in P^+\}$, ce qui permet de calculer le caractère de $\chi(V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda))$ grâce à la proposition 4.2.3. Cette conjecture est finalement démontrée dans [KazLus1991] pour $\mathfrak{g}$ de type A, D ou E et les hypothèses sur l utilisées par Lusztig.

Terminons par une factorisation des caractères des représentations irréductibles, en utilisant ce qui a été discuté dans la section précédente. Pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$ notons $\Phi_k:\sum_\mu a_\mu e^\mu\mapsto\sum_\mu a_\mu e^{k\mu}$. Plus généralement, pour toute suite $k=(k_1,...k_n)\in(\mathbb{N}^*)^n$ on note Φ_k le morphisme de caractères envoyant μ sur $\sum_{i=1}^n k_i\mu(\alpha_i^\vee)\omega_i$.

Proposition 4.2.5. *Supposons l impair, premier avec les d_i et tel que $1\le d_i<l$. Écrivons $\lambda=\lambda_0+l\lambda_1$ où pour tout $1\le i\le n$, $0\le\lambda_0(\alpha_i^\vee)<l$. Alors*

$$\chi(V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma,\lambda))=\sigma\,\chi(V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_0))\,\Phi_l(\chi(V(\lambda_1)))\tag{4.20}$$

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition 4.1.8. □

Notons que $\chi(V(\lambda_1))$ est donné par la formule des caractères de Weyl (voir appendices A.2 et B.2). Si on arrive à interpréter le troisième facteur $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_1)$ dans la factorisation (4.9) comme un tiré-en-arrière d'une représentation irréducible, alors on peut généraliser cette formule de caractères en utilisant Φ_k pour un certain $k\in(\mathbb{N}^*)^n$. Par exemple $k=(m_1,m_2,...,m_n)$ pour l'interprétation donnée dans la proposition 4.1.9 et $k=(m_1/m_1',m_2/m_2'...,m_n/m_n')$ pour celle de la proposition 4.1.10.

4.3 Tilting Modules

Nous reprenons ici essentiellement la section 11.3 de [CP1994]. La majorité des résultats proviennent de [And1992], [Par1992] et [AP1995].

Nous revenons aux restrictions usuelles sur l, en particulier on suppose qu'il est impair. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on suppose de plus que l est premier avec les d_i et satisfait $1 \leq d_i < l$. On définit l'alcôve principal par

$$C_l = \{\lambda \in P^+ | \forall \alpha \in \Delta^+, (\lambda + \rho)(\alpha^\vee) < l\} \tag{4.21}$$

On peut montrer que $C_l \neq 0 \Leftrightarrow 0 \in C_l \Leftrightarrow l \geq h$ où h est le nombre de Coxeter de l'algèbre de lie $\mathfrak{g}$ (voir l'annexe A.1). Dans la suite, nous supposerons de plus que $l > h$. Rappelons que toute représentation d'une algèbre de Hopf possède une représentation duale où l'action est décrite dans la section 1.5 par (1.16). Cela permet de définir la notion suivante :

Définition 4.3.1. Un $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module V de type 1 a une filtration de Weyl s'il existe une suite

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq ... \subseteq V_p = V$$

avec pour tout $r = 1, ..., p$, $V_r/V_{r-1} \cong W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda_r)$ pour un certain $\lambda_r \in P^+$. Un $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module V de type 1 est un tilting module si V et V^* possèdent une filtration de Weyl.

Exemple 4.3.2. Si $\lambda \in C_l$ alors la proposition 4.2.4 montre que $W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda) = V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda)$ est irréductible. De plus $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda)^* \cong V_\epsilon^{\mathrm{res}}(-w_0(\lambda))$ et $-w_0(\lambda) \in C_l$ donc $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda)^* \cong W_\epsilon^{\mathrm{res}}(-w_0(\lambda))$. Ainsi, $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda)$ est un tilting module.

Les tilting modules possèdent les propriétés de stabilités suivantes :

Proposition 4.3.3. *(i) Le dual d'un tilting module est un tilting module.*

(ii) La somme directe de deux tilting modules est un tilting module.

(iii) Si un tilting module s'écrit comme une somme directe de deux modules, alors chaque terme est aussi un tilting module.

(iv) Le produit tensoriel de deux tilting modules est un tilting module.

□

La proposition 4.3.3 montre en particulier que l'on peut restreindre l'étude aux tilting modules indécomposables. Ceux-ci sont paramétrés par P^+ :

Proposition 4.3.4. *Pour tout $\lambda \in P^+$ il existe, à isomorphisme près, un unique tilting module indécomposable $T_\epsilon(\lambda)$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

(i) L'ensemble des poids de $T_\epsilon(\lambda)$ est inclus dans l'enveloppe convexe de l'orbite de λ par l'action du groupe de Weyl.

(ii) λ est l'unique poids maximal de $T_\epsilon(\lambda)$

(iii) $\dim T_\epsilon(\lambda)_\lambda = 1$

(iv) $T_\epsilon(\lambda)^* \cong T_\epsilon(-w_0(\lambda))$

Réciproquement, tout tilting module indécomposable est isomorphe à un tel $T_\epsilon(\lambda)$. □

Des propositions 4.3.3 et 4.3.4, on déduit divers corollaires intéressants :

Corollaire 4.3.5. *Soit T un tilting module. Alors on a la décomposition*

$$T \cong \bigoplus_{\lambda \in P^+} T_\epsilon(\lambda)^{\oplus n_\lambda(T)} \tag{4.22}$$

où les multiplicités $n_\lambda(T)$ ne dépendent que de T.

Démonstration. T s'écrit comme une somme directe de modules indécomposable. Par la proposition 4.3.3, les termes de cette sommes sont des tilting modules indécomposables. Par la proposition 4.3.4 ces termes sont des $T_\epsilon(\lambda)$ pour des $\lambda \in P^+$. D'où on obtient la décomposition (4.22). On montre l'unicité des $n_\lambda(T)$ par récurrence sur $\dim(T)$. Si $T = 0$, clairement on a $\forall \lambda \in P^+, n_\lambda(T) = 0$. Supposons $T \neq 0$ et écrivons-le

$$T \cong \bigoplus_{\lambda \in P^+} T_\epsilon(\lambda)^{\oplus n_\lambda(T)} \cong \bigoplus_{\lambda \in P^+} T_\epsilon(\lambda)^{\oplus n'_\lambda(T)}$$

Si μ est un poids maximal de T, alors nécessairement $T_\epsilon(\mu)$ apparait dans toute décomposition (4.22) de T. Donc $T = T' \oplus T_\epsilon(\mu)$ où

$$T' \cong T_\epsilon(\mu)^{\oplus n_\mu(T)-1} \oplus \bigoplus_{\lambda \neq \mu} T_\epsilon(\lambda)^{\oplus n_\lambda(T)} \cong T_\epsilon(\mu)^{\oplus n'_\mu(T)-1} \oplus \bigoplus_{\lambda \neq \mu} T_\epsilon(\lambda)^{\oplus n_\lambda(T)}$$

Alors $\dim(T') < \dim(T)$, et par hypothèse de récurrence, on obtient pour tout $\lambda \in P^+$ que $n_\lambda(T) = n'_\lambda(T)$. ☐

Corollaire 4.3.6. *Soient T_1 et T_2 des tilting modules tels que $\chi(T_1) = \chi(T_2)$. Alors $T_1 \cong T_2$.*

Démonstration. Si $\chi(T_1) = \chi(T_2)$, alors en particulier T_1 et T_2 ont même dimension. On montre le résultat par récurrence sur $\dim(T_1) = \dim(T_2)$. Le cas 0 est clair. Si la propriété est vraie pour toute dimension strictement inférieur à $\dim(T_1) = \dim(T_2)$, alors comme $\chi(T_1) = \chi(T_2)$, T_1 et T_2 ont les mêmes poids donc les mêmes poids maximaux. Soit μ un tel poids, alors on peut écrire $T_1 = T'_1 \oplus T_\epsilon(\mu)$ et $T_2 = T'_2 \oplus T_\epsilon(\mu)$. On a $\chi(T'_1) = \chi(T'_2)$ et par hypothèse de récurrence $T'_1 \cong T'_2$. D'où $T_1 \cong T_2$. ☐

Corollaire 4.3.7. *Soient T_1 et T_2 des tilting modules alors $T_1 \otimes T_2 \cong T_2 \otimes T_1$.*

Démonstration. En effet, d'après la proposition 4.2.2, $\chi(T_1 \otimes T_2) = \chi(T_1)\chi(T_2) = \chi(T_2)\chi(T_1) = \chi(T_2 \otimes T_1)$. Donc le corollaire précédent donne $T_1 \otimes T_2 \cong T_2 \otimes T_1$. ☐

Considérons maintenant la notion suivante :

Définition 4.3.8. Notons $\rho = \sum_{i=1}^n r_i \alpha_i$ la décomposition de ρ dans la base $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et posons

$$\rho^* = \prod_{i=1}^n K_i^{2r_i} \tag{4.23}$$

Pour tout endomorphisme f d'un $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$-module V, on définit la trace quantique par

$$\mathrm{qtr}(f) = \mathrm{Tr}(K_{\rho^*} f) \tag{4.24}$$

En prenant $f = \mathrm{id}_V$, on obtient la dimension quantique

$$\mathrm{qdim}(V) = \mathrm{Tr}(K_{\rho^*}) \tag{4.25}$$

On peut montrer que si $\lambda \in C_l$ alors le tilting module indécomposable de poids maximal λ est irréductible i.e. $T_\epsilon(\lambda) = W_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda) = V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\lambda)$. [And1992] montre que la trace quantique permet de distinguer ces tilting modules irréductibles :

Proposition 4.3.9. *Soit $\lambda \in P^+$. Alors $\mathrm{qdim}(T_\epsilon(\lambda)) \neq 0$ si et seulement si $\lambda \in C_l$.* ☐

En particulier, la décomposition (4.22) peut s'écrire

$$\begin{aligned} T &\cong \bigoplus_{\lambda \in C_l} T_\epsilon(\lambda)^{\oplus n_\lambda(T)} \oplus \bigoplus_{\lambda \in P^+ \setminus C_l} T_\epsilon(\lambda)^{\oplus n_\lambda(T)} \\ &\cong \overline{T} \oplus Z \end{aligned} \tag{4.26}$$

où $\overline{T} = \bigoplus_{\lambda \in C_l} V_\epsilon(\lambda)^{\oplus n_\lambda(T)}$ est une somme de modules irréductibles et $Z = \bigoplus_{\lambda \in P^+ \setminus C_l} V_\epsilon(\lambda)^{\oplus n_\lambda(T)}$ satisfait $\mathrm{qdim}(Z) = \sum_{\lambda \in P^+ \setminus C_l} n_\lambda(T)\, \mathrm{qdim}(V_\epsilon(\lambda)) = 0$. Si T_1 et T_2 sont deux tilting modules, alors on définit

$$T_1 \overline{\otimes} T_2 = \overline{T_1 \otimes T_2} \tag{4.27}$$

On peut montrer que $\overline{\otimes}$ est commutatif et associatif. En considérant les objets $\overline{T}$, on construit une catégorie avec des propriétés remarquables. Par exemple elle est semi-simple, stable par somme directe, par produit tensoriel et par passage au dual. [AP1995] décrit cette catégorie et traite le cas où l est pair en utilisant une variante de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$ donnée par Lusztig dans [Lus1993]. La construction d'une telle catégorie pour la définition standard de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}$ et l pair ne semble pas avoir été considérée.

Conclusion

Dans ce mémoire de master, nous nous sommes intéressés à la spécialisation restreinte $U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante quantifiée $U_q(\mathfrak{g})$ à une racine l'unité. Nous avons aussi étudié les $U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie.

Nous avons tout d'abord rappelé les propriétés de l'algèbre enveloppante et de la forme intégrale construite par Luzstig. Nous avons essayé de donner de façon la plus détaillée possible les calculs des formules énoncées par Luzstig et qui sont essentielles pour la suite. Nous avons aussi indiqué que les $U_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie ont des propriétés très proches du cas classiques : complète réductibilité, modules irréductibles paramétrés par un plus haut poids $\lambda \in P^+$ (et un type $\sigma \in \{-1, 1\}^n$), formule des caractères de Weyl etc Ces propriétés sont aussi vérifiées lorsque l'on spécialise q en un nombre ϵ non racine de l'unité.

Nous avons considéré la spécialisation restreinte $U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ en une racine de l'unité ϵ d'ordre l, décrit les représentations de dimension finie et défini un caractère pour celles-ci. Notre principale contribution est de fournir les formules et démonstrations des propriétés pour un ordre l arbitraire, sans les restrictions usuelles que l'on trouve dans la littérature. On retrouve essentiellement les résultats de Luzstig où l est remplacé par des m_i et où des signes $(-1)^{m_i+1}, \epsilon_i^{m_i}$ apparaissent dans les formules. Nous avons aussi classifié les $U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$-modules irréductibles, paramétrés par un plus haut poids $\lambda \in P^+$ et un type $\sigma \in \{-1, 1\}^n$. Nous avons aussi donné l'exemple d'un $U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$-modules indécomposable mais réductible.

On a ensuite étudié la factorisation de Luzstig dans notre cadre général, en ajoutant seulement l'hypothèse $1 \leq d_i < m$. Si $V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda)$ est un $U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$-module irréductible et si on écrit $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, où pour tout $1 \leq i \leq n$, $0 \leq \lambda_0(\alpha_i^\vee) < m_i$ et $\lambda_1(\alpha_i^\vee) \equiv 0 \mod m_i$, alors

$$V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, \lambda) \cong V_\epsilon^{\mathrm{res}}(\sigma, 0) \otimes V_\epsilon^{\mathrm{res}}(1, \lambda_0) \otimes V_\epsilon^{\mathrm{res}}(1, \lambda_1)$$

Le premier facteur est unidimensionel et le second est une représentation d'une algèbre de dimension finie. Avec les restrictions de Lusztig sur l, le troisième facteur s'interprète comme le tiré-en-arrière d'une représentation irréductible de l'algèbre enveloppante classique $U(\mathfrak{g})$ par un certain morphisme. Nous avons montré, sous réserve de l'existence d'un morphisme similaire $U(\mathfrak{g}) \to U_{\epsilon'}^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ pour une certaine racine de l'unité ϵ', que l'on peut généraliser cette interprétation en considérant le tiré-en-arrière d'une représentation irréductible de $U_{\epsilon'}^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$. Il semble que ϵ' d'ordre divisant 24 soit suffisant.

Enfin, nous avons brièvement décrit le cadre des tilting modules de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ en reprenant les restrictions usuelles sur l. Ceux-ci possèdent des propriétés remarquables de stabilité par somme directe, produit tensoriel et passage au dual et peuvent se décomposer comme une somme directe de tilting modules indécomposables. Nous avons aussi indiqué que l'on peut en déduire une catégorie semi-simple possédant ces propriétés de stabilité.

Nous avons montré de façon précise comment les résultats usuels sur la spécialisation restreinte peuvent se généraliser au cas d'une racine de ϵ d'ordre l arbitraire, ce qui est notamment intéressant pour les applications mentionnées dans [Saw2010]. Nous avons aussi trouvé quelques différences comme pour la généralisisation de la factorisation de Luzstig des $U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$-modules irréductibles.

Nous n'avons toutefois pas généralisé le cadre des tilting modules pour un l arbitraire. [AP1995] contourne ce problème en changeant la définition de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ lorsque l ne respecte pas les conditions usuelles. Il serait intéressant de prolonger le travail de ce mémoire en étudiant les tilting modules pour un tel l tout en gardant la définition standard de $U_\epsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$.

Nous avons enfin mentionné la spécialisation non-restreinte $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ qui est de dimension finie sur son centre. Il serait aussi intéressant de s'intéresser à la spécialisation non-restreinte $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ pour une racine de l'unité ϵ d'ordre arbitraire.

Annexe A

Théorie Classique

Nous listons dans cette annexe quelques résultats sur la théorie de Lie classique. Le contenu est standard et peut être trouvé dans n'importe quelle référence dans ce domaine, par exemple [Hum1972].

A.1 Algèbres de Lie simples de dimension finie

Type	Matrice de Symétrisation d_i	Matrice de Cartan a_{ij}	Nombres de Coxeter
A_n	$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$h = h^\vee = n + 1$
B_n	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -2 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$h = 2n, h^\vee = 2n - 1$
C_n	$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix}$	$h = 2n, h^\vee = n + 1$
D_n	$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & -1 \\ & & -1 & 2 & 0 \\ & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$h = h^\vee = 2n - 2$
E_6	$I_6 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$h = h^\vee = 12$

E_7	$I_7 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$h = h^\vee = 18$
E_8	$I_8 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$h = h^\vee = 30$
F_4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$h = 12, h^\vee = 9$
G_2	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$h = 6, h^\vee = 4$

A.2 Formule des caractères de Weyl

Soit V est une représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ ou de façon équivalente de son algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$. Rappelons la définition du caractère de V par

$$\chi(V) = \sum_{\lambda} \dim(V_\lambda) e^\lambda \tag{A.1}$$

où e^λ est un symbole formel satisfaisant $e^\lambda e^{\lambda'} = e^{\lambda+\lambda'}$ pour tout $\lambda, \lambda' \in P$. Si V est irréductible alors c'est une représentation de plus haut poids $\lambda \in P^+$ et son caractère est donné par la formule des caractères de Weyl :

$$\chi(V(\lambda)) = \frac{\sum_{w\in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\lambda+\rho)}}{e^\rho \prod_{\alpha>0}(1 - e^{-\alpha})} \tag{A.2}$$

Annexe B

Spécialisations de l'algèbre enveloppante quantifiée

Nous décrivons succinctement la spécialisation non-restreinte de $U_q(\mathfrak{g})$ en suivant [CP1994]. Nous procédons ensuite à une étude de la spécialisation non-restreinte en $\epsilon = \pm 1$. Sans surprise, nous retrouvons les résultats de la spécialisation restreinte pour ces racines de l'unité.

B.1 Spécialisation non-restreinte

On se place dans U_q et on définit pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$[K_i; m]_{q_i} = \frac{K_i q_i^m - K_i^{-1} q_i^{-m}}{q_i - q_i^{-1}} \tag{B.1}$$

Clairement, $[K_i; m]_{q_i}$ est dans U_q^0 et commutent donc avec les K_j. On définit la sous $\mathcal{A}$-algèbre $U_{\mathcal{A}}$ de U_q engendrée par les éléments $X_i^{\pm}, K_i^{\pm 1}$ et $[K_i; m]_{q_i}$ pour $1 \leq i \leq n$. Les relations sont celles de la définition 2.1.2 en remplaçant (2.4) par

$$X_i^+ X_j^- - X_j^- X_i^+ = \delta_{i,j}[K_i; 0] \tag{B.2}$$

et en ajoutant la relation

$$(q_i - q_i^{-1})[K_i; 0] = K_i - K_i^{-1} \tag{B.3}$$

On obtient une structure d'algèbre de Hopf en étendant la proposition 2.1.3 par

$$\Delta([K_i; 0]_{q_i}) = [K_i; 0]_{q_i} \otimes K_i + K_i^{-1} \otimes [K_i; 0]_{q_i} \tag{B.4}$$

$$S([K_i; 0]_{q_i}) = -[K_i; 0]_{q_i} \tag{B.5}$$

$$\epsilon([K_i; 0]_{q_i}) = 0 \tag{B.6}$$

Il est clair que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les $[K_i; k]$ appartiennent à $U_{\mathcal{A}}$. En effet,

$$[K_i; k]_{q_i} = [K_i; 0]_{q_i} q_i^{-k} + K_i [k]_{q_i} \tag{B.7}$$

De plus, pour tout i, j on a

$$[K_i;0]X_j^{\pm} = X_j^{\pm}[K_i;\pm a_{ij}] \tag{B.8}$$

Alors $U_{\mathcal{A}}$ est une forme intégrale et on obtient alors la spécialisation non-restreinte U_ϵ comme la définition 2.2.1. U_ϵ^+ est l'algèbre engendrée par les X_i^+, U_ϵ^- celle engendrée par les X_i^- et U_ϵ^0 celle engendrée par les $[K_i;0]$ et $K_i^{\pm 1}$.

B.2 Spécialisation en ± 1

On considère la spécialisation non-restreinte en $\epsilon = \pm 1$. La relation (B.3) devient

$$K_i^2 = 1 \tag{B.9}$$

En utilisant (1.4), (B.7) devient pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$[K_i;\pm k] = [K_i;0]\epsilon_i^{\mp k} \pm K_i {\epsilon_i}^{(k-1)} k \tag{B.10}$$

Soit $V \neq 0$ un U_ϵ-module de dimension finie. Fixons $1 \leq i \leq n$. Par B.9, les valeurs propres de l'action de K_i sont dans $\{-1,+1\}$. Considérons celles de l'action de $[K_i;0]$. Pour cela définissons A_i la sous-algèbre de $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ engendrée par K_i, K_i^{-1}, X_i^+, X_i^- et $[K_i;0]$. Soit $s \in \{-1,+1\}$. Par (B.2), (B.8) et (B.10) on a

$$[sX_i^+, sX_i^-] = [K_i;0]$$
$$[s[K_i;0], sX_i^{\pm}] = \pm 2X_i^{\pm}K_i\epsilon_i$$

On a déjà noté que K_i commute avec $[K_i;0]$. De plus $K_iX_i^{\pm}v = \epsilon_i^{\pm 2}X_i^{\pm}K_i = X_i^{\pm}K_i$. Ainsi K_i est central dans A_i et par conséquent le sous-espace

$$V_{i,s} = \{v \in V | K_iv = s\epsilon_i v\}$$

est stable par l'action de A_i. C'est un sous A_i-module de V. Toujours parce que K_i est central, on peut considérer le quotient $B_{is} = A_i/(K_i - s\epsilon_i)$. Alors dans B_{is}, $(sX_i^+, s[K_i;0], sX_i^-)$ est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet et par conséquent $B_{is} \cong U(\mathfrak{sl}_2)$. Par définition, l'action de A_i passe au quotient et $V_{i,s}$ peut donc être vu comme un $U(\mathfrak{sl}_2)$-module. En particulier les valeurs propres de l'action de $[K_i;0]$ sur $V_{i,s}$ sont entières. Comme $V = V_{i,+1} \oplus V_{i,-1}$, les valeurs propres de l'action de $[K_i;0]$ sur V sont entières.

Maintenant, $\epsilon \in \{-1,+1\}$ correspond à $l \in \{1,2\}$ donc $m = 1 = m_i$. Par analogie avec (3.17) on définit pour $\sigma \in \{-1,1\}^n$ et $\lambda \in P$:

$$V_{\sigma,\lambda} = \bigcap_{1\leq i\leq n} \mathrm{Ker}\left(K_i - \sigma_i\epsilon_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)}1\right) \cap \mathrm{Ker}\left([K_i;0] - \sigma_i{\epsilon_i}^{\lambda(\alpha_i^\vee)+1}\lambda(\alpha_i^\vee)\right) \tag{B.11}$$

Soit $v \in V_{\sigma,\lambda}$. On a pour tout i, j :

$$K_iX_j^{\pm}v = \epsilon_i^{\pm a_{ij}}X_j^{\pm}K_iv = \sigma_i\epsilon_i^{(\lambda\pm\alpha_j)(\alpha_i^\vee)}X_j^{\pm}v \tag{B.12}$$

Et par (B.8) et (B.10) :

$$\begin{aligned}
[K_i;0]X_j^{\pm}v &= X_j^{\pm}[K_i;\pm a_{ij}]v \\
&= X_j^{\pm}([K_i;0]\epsilon_i^{\mp a_{ij}} \pm K_i{\epsilon_i}^{(a_{ij}-1)}a_{ij})v \\
&= X_j^{\pm}(\sigma_i{\epsilon_i}^{\lambda(\alpha_i^\vee)+1}\lambda(\alpha_i^\vee)\epsilon_i^{\mp a_{ij}} \pm \epsilon_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)}{\epsilon_i}^{(a_{ij}-1)}a_{ij})v \\
&= (\sigma_i\epsilon_i^{(\lambda\pm\alpha_j)(\alpha_i^\vee)+1})(\lambda\pm\alpha_j)(\alpha_i^\vee)X_j^{\pm}v
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Finalement on obtient pout tout $1 \leq j \leq n$:

$$X_j^{\pm} V_{\sigma,\lambda} = V_{\sigma,\lambda\pm\alpha_j} \tag{B.14}$$

et pour tout $\sigma \in \{-1,1\}^n$, $V_\sigma = \sum_\lambda V_{\sigma,\lambda}$ est un sous-module de V.

Les $K_i, [K_i, 0]$ commutent deux à deux et $K_i^2 = 1$ donc on peut effectuer une réduction simultanée où l'action des K_i est diagonale. On peut de plus toujours trouver un σ tel que $V_\sigma \neq 0$. Si on suppose V irréductible alors $V = V_\sigma$. On dit que V est de type σ. V étant de dimension finie, il existe λ maximal tel que $V_{\sigma,\lambda} \neq 0$. Soit $v_{\sigma,\lambda} \in V_{\sigma,\lambda}$ alors $v_{\sigma,\lambda}$ est un vecteur primitif et engendre V. Donc V est un U_ϵ-module de plus haut poids λ et de type σ. Pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $s \in \{-1,+1\}$ tel que $v_{\sigma,\lambda} \in V_{is}$ alors $B_{is} v_{\sigma,\lambda}$ est un $U(\mathfrak{sl}_2)$-module de plus haut poids $\lambda(\alpha_i^\vee)$ et en particulier $\lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N}$. D'où $\lambda \in P^+$.

Par une construction de module de Verma, on montre l'existence d'un unique U_ϵ-module irréductible $V_\epsilon(\sigma, \lambda)$ de type $\sigma \in \{-1,+1\}^n$ et de plus haut poids $\lambda \in P^+$. Alors l'analyse précédente montre que l'on obtient ainsi une classification complète des U_ϵ-modules irréductibles de dimension finie.

Notons que pour $\epsilon = 1$, les K_i sont centraux. Alors le quotient de $U_1(\mathfrak{g})$ par l'idéal engendré par les $K_i - 1$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$. Si V de type 1, les K_i agissent sur V par 1 et l'action passe au quotient. Alors

$$V_\lambda = \bigcap_{1\leq i\leq n} \mathrm{Ker}\left([K_i; 0] - \lambda(\alpha_i^\vee)\right) \tag{B.15}$$

et en particulier le caractère de V est donné la formule des caractères de Weyl.

Bibliographie

[And1992] Henning Haahr Andersen. Tensor products of quantized tilting modules. *Comm. Math. Phys.*, 149(1) :149–159, 1992.

[AP1995] Henning Haahr Andersen and Jan Paradowski. Fusion categories arising from semisimple Lie algebras. *Comm. Math. Phys.*, 169(3) :563–588, 1995.

[APW1991] Henning Haahr Andersen, Patrick Polo and Kexin Wen. Representations of quantum algebras *Invent. Math.*, 104, 1–59

[CP1994] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. *A guide to quantum groups.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Hum1972] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer-Verlag, New York, 1972.

[KazLus1991] David Kazhdan and George Lusztig. *Affine Lie Algebras and Quantum Groups. International Mathematics Research Notices*, 1991

[Lus1989] George Lusztig. *Modular Representations and Quantum Groups* in Classical Groups and Related Topics *Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc.*, volume 82, 1989

[Lus1990a] George Lusztig. *Finite-dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebra. J. Amer. Math. Soc.*, 3(1) :257–296, 1990.

[Lus1990b] George Lusztig. Quantum groups at roots of 1. *Geom. Dedicata*, 35(1-3) :89–113, 1990.

[Lus1990c] George Lusztig. *On Quantum Groups Journal of Algebra*, 131, 466–475, 1990.

[Lus1993] George Lusztig. *Introduction to Quantum Groups*, Birkhäuser 1993

[Par1992] Jan Paradowski. *Filtrations of modules over quantum algebras* Proc. Symp. in Pure Math. 56, Part 2, 1994, pp. 93–108.

[Ros1988] Marc Rosso. *Finite Dimensional Representations of the Quantum Analog of the Enveloping Algebra of a Complex Simple Lie Algebra.* Commun. Math. Phys. 117 (1988), 581-593.

[Saw2010] Stephen F. Sawin. *Quantum groups at roots of unity and modularity.* preprint, arXiv : math.QA/0308281. 2010.